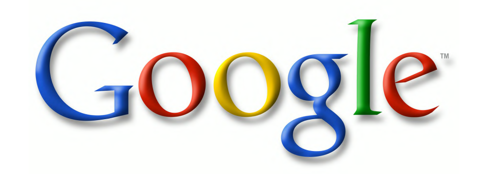

Google









PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRODYNAMIQUE, CAPILLARITÉ, CHALEUR, ÉLECTRICITÉ, MAGNÉTISME, ÉLASTICITÉ.

PAR M. H. RESAL,
Membre de l'Institut,
Professeur à l'École Polytechnique et à l'École nationale supérieure des Mines.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
—
1884

AVANT-PROPOS.

L'idée de constituer en corps de doctrine la *Physique mathématique* est due à Poisson, qui comptait publier un Traité complet sur ce sujet. Mais il n'a pu faire paraître que deux volumes de son Ouvrage, se rapportant respectivement à la capillarité (1831) et à la théorie de la chaleur (1835). La mort est venue le surprendre en 1840, avant qu'il ait pu coordonner ses nombreux travaux sur les autres branches de la Science à laquelle il venait de donner un nom, et notamment sur le magnétisme.

La Physique mathématique, telle qu'on l'entend actuellement, doit, il nous semble, être considérée comme ayant pour point de départ la théorie de la capillarité, que Laplace a substituée à la théorie très contestable de Clairaut, laquelle est à peu près tombée dans l'oubli.

Un peu plus tard (1807-1822), Fourier est venu donner à la Physique mathématique un appoint considérable, en créant sa théorie analytique de la chaleur, qui a eu d'ailleurs pour conséquence de faire faire un immense progrès à l'analyse des équations différentielles partielles.

En 1824, Sadi Carnot jette les bases de la thermodynamique.

De 1819 à 1827, Fresnel crée la théorie actuelle de la lumière.

De 1820 à 1827, Ampère crée l'électrodynamique.

En 1827, Navier donne les équations fondamentales de la théorie de l'élasticité, théorie qui a reçu depuis tant de développements de la part de Cauchy, Lamé et de M. de Saint-Venant.

Les géomètres français ont, comme on le voit, joué un rôle capital dans la création de la Physique mathématique.

Mais, depuis un certain nombre d'années, nos jeunes analystes, à quelques exceptions près, ont tourné leurs vues dans une autre direction, tandis que les savants allemands (Clebsch, Riemann, Clausius, etc.) et anglais (G. Green, W. Thomson, J. Thomson, etc.) s'emparaient de la Physique mathématique, à laquelle ils ajoutaient de nombreux et remarquables Chapitres.

C'est avec regret que j'ai constaté cet abandon, et c'est ce qui m'a décidé, en vue d'attirer l'attention de nos jeunes géomètres, à publier quelques Mémoires, sur le sujet dont il s'agit, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Par la force des choses, j'ai été conduit à relier entre eux ces Mémoires, en les complétant de manière à en former un volume.

J'ai cru devoir me dispenser de reproduire la thermodynamique, qui est entrée dans l'enseignement ordinaire, et la théorie de la lumière, qui, par l'extension qu'elle a prise, est devenue un Chapitre à part de Physique mathématique.

ÉLECTRODYNAMIQUE.

1. Élève de la première division de l'École Polytechnique en 1849, les leçons de Physique de Bravais avaient déterminé en moi une véritable passion pour la théorie de l'Électrodynamique. C'est ainsi que j'ai été conduit à chercher s'il ne serait pas possible d'apporter quelques simplifications dans les calculs assez longs et pénibles d'Ampère, l'illustre fondateur de cette théorie, développée plus tard par plusieurs savants, parmi lesquels Savary et Demonferrand figurent en première ligne. Mes recherches ont abouti dans certaines limites et font l'objet de cette Note; elles ont été adoptées en partie par Bravais dans son cours de 1850, puis publiées plus tard, ou plutôt enterrées, par extrait, dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* (1854). J'ose espérer que cette exhumation sera accueillie avec faveur par quelques-uns de nos lecteurs. J'ai apporté d'ailleurs, dans cette nouvelle rédaction, de notables perfectionnements.

2. *Premiers faits sur lesquels s'appuie l'hypothèse d'Ampère.* — L'expérience nous apprend que :

1° L'action d'un courant rectiligne peut, en toute circonstance, être substituée à celle d'un courant sinueux dont la forme en diffère très peu et dont l'intensité est la même.

2° L'attraction ou la répulsion mutuelle de deux courants agissant

l'un sur l'autre se transforme, par un changement de sens dans l'un d'eux, en répulsion ou en attraction.

3° Deux courants rectilignes parallèles s'attirent ou se repoussent selon qu'ils sont de même sens ou de sens contraires.

3. *Conséquence.* — Il résulte du premier de ces faits que, *si l'on considère un courant de forme quelconque comme étant composé d'éléments rectilignes, on peut substituer à chacun de ces éléments un ensemble de courants de même intensité, et dont il est la somme géométrique.*

On voit, d'après ce principe, que l'on arrivera à déterminer l'action réciproque de deux courants de forme quelconque lorsque l'on connaîtra la loi suivant laquelle s'exerce l'action mutuelle de deux éléments de courant.

Pour arriver à la connaissance de cette loi élémentaire, nous admettrons que *l'action ci-dessus s'exerce suivant la droite qui joint les extrémités des deux éléments par lesquelles les courants arrivent* ([1]).

Du second des faits ci-dessus énoncés on déduit qu'*un élément de courant ab n'exerce aucune action sur un autre élément de courant a′b′ situé dans un plan mené normalement à l'extrémité a du premier, par laquelle arrive le courant.* En effet, si, par exemple, il y avait une attraction dirigée suivant aa', en faisant subir au plan $aa'b'$, entraînant avec lui $a'b'$, une demi-révolution autour de ab, l'action mutuelle resterait toujours une attraction, tandis que l'élément $a'b'$ prendrait, par rapport à ab, une position inverse de celle qu'il avait d'abord : or, d'après l'observation, l'attraction devrait se transformer en répulsion, ce qui est absurde.

4. *Action mutuelle de deux éléments de courants.* — Soient (*fig.* 1)

$ab = ds$, $a'b' = ds'$ deux éléments de courants dont les intensités respectives sont i et i' ;

$r = aa'$ la droite qui joint les extrémités de ces éléments par lesquelles arrivent les courants ;

([1]) Ampère admettait que cette droite joignait les milieux des deux éléments en présence. La différence entre les deux conventions repose sur une subtilité à laquelle il n'y a pas lieu de s'arrêter.

α, α' les angles formés par ab, $a'b'$ avec aa' et $a'a$;
θ l'angle dièdre déterminé par les deux plans baa', $b'a'a$.

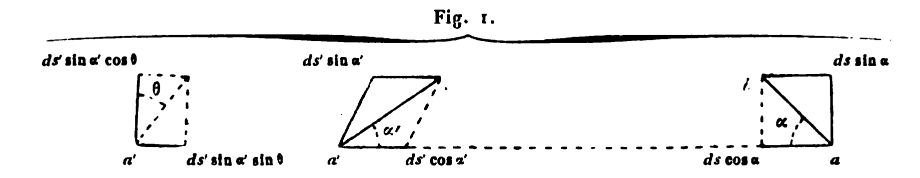
Nous pouvons substituer à l'élément ds ses deux composantes $ds \cos\alpha$, dirigée suivant aa', et $ds \sin\alpha$, dirigée normalement à cette direction. Nous pouvons de même substituer à ds' deux composantes, l'une, $ds' \cos\alpha'$, dirigée suivant $a'a$, et l'autre, $ds' \sin\alpha'$, perpendiculaire à la première.

L'élément $ds' \sin\alpha'$ se décompose en deux autres, l'un, $ds' \sin\alpha' \cos\theta$, parallèle à $ds \sin\alpha$, et l'autre, $ds' \sin\alpha' \sin\theta$, perpendiculaire au plan $a'ab$.

D'après ce que nous avons vu à la fin du n° 3, $ds' \sin\alpha' \sin\theta$ n'exerce aucune action sur $ds \sin\alpha$, $ds \cos\alpha$, et par suite sur ds.

L'action de l'élément $ds' \sin\alpha' \cos\theta$ sur ds se réduit à celle qu'il

Fig. 1.



exerce sur l'élément $ds \sin\alpha$, qui lui est parallèle. Nous supposerons que cette action est proportionnelle au produit des deux éléments et des intensités des courants, et en raison inverse d'une certaine puissance n de la distance r, de sorte que nous pourrons la représenter par

$$(a) \qquad ii' \frac{ds\,ds' \sin\alpha \sin\alpha' \cos\theta}{r^n}.$$

Nous conviendrons de considérer cette même action comme positive si c'est une attraction ou si $ds' \sin\alpha' \cos\theta$ et $ds \sin\alpha$ sont traversés dans le même sens par les courants; le signe du produit $\sin\alpha \sin\alpha' \cos\theta$ fera d'ailleurs connaître s'il s'agit d'une attraction ou d'une répulsion.

Il nous reste maintenant à tenir compte de l'action de $ds' \cos\alpha'$ sur $ds \cos\alpha$. Nous admettrons, comme ci-dessus, que cette action est proportionnelle au produit de ces éléments par ii' et varie en raison inverse de r^n; si nous désignons par k le rapport, supposé constant, entre les actions de deux éléments en ligne droite de sens contraires et de deux éléments parallèles de même sens, toutes choses égales d'ailleurs, nous

aurons, pour l'action dont il s'agit,

$$(b) \qquad \frac{kii'ds\,ds'\cos\alpha\cos\alpha'}{r^n}.$$

L'action totale de ds' sur ds ou la somme des expressions (a) et (b) sera ainsi représentée par

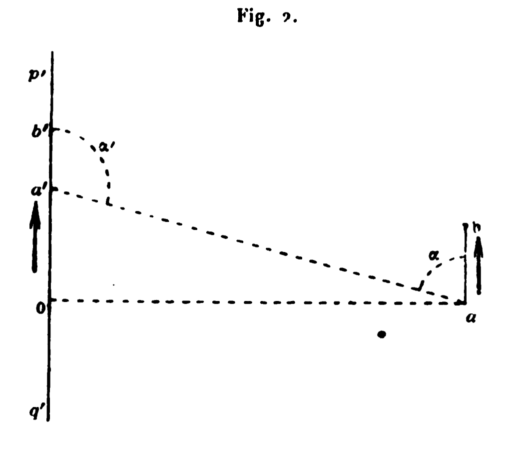
$$(c) \qquad \frac{ii'ds\,ds'}{r^n}(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta).$$

Les hypothèses sur lesquelles repose cette formule ne peuvent recevoir leur justification que par la concordance entre les résultats auxquels elle conduit et ceux que l'on déduit de l'expérience dans tous les cas qui peuvent se présenter.

5. *Détermination de la constante n.* — Ampère a obtenu la valeur de cette constante en partant de ce fait qu'*un courant rectiligne p'q', assez long pour qu'on puisse le considérer comme infini, exerce sur un courant rectiligne fini pq qui lui est parallèle une action qui varie en raison inverse de la distance des deux courants,* action qui est d'ailleurs attractive ou répulsive selon que les courants sont ou non de même sens.

Admettons (*fig.* 2) que pq se réduise à un élément $ab = ds$. Soient

Fig. 2.



$l = Oa$ la distance de a à $p'q'$; $a'b' = ds'$ un élément de $p'q'$. Nous

avons $\theta = 0$, et en ce qui concerne ab et $a'b'$,

$$\widehat{baa'} = \alpha, \quad \widehat{b'a'a} = \alpha' = 180^\circ - \alpha, \quad r = aa' = \frac{l}{\sin\alpha},$$
$$s' = Oa' = l\cot\alpha, \quad ds' = -\frac{l\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

L'attraction, si l'on admet que les deux courants soient de même sens, de $p'q'$ sur ab sera évidemment dirigée suivant aO, et la formule (c) donne, pour la composante suivant cette dernière direction de l'attraction produite par $a'b'$,

$$-\frac{ii'\,ds}{l^{n-1}}\sin^{n-2}\alpha(-k\cos^2\alpha + \sin^2\alpha),$$

d'où, pour l'action totale exercée par $p'q'$ sur ab,

$$(d) \qquad -\frac{2ii'\,ds}{l^{n-1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^{n-2}\alpha(-k\sin^2\alpha + \sin^2\alpha)\,d\alpha.$$

Ce résultat, comparé à celui de l'expérience, conduit à poser $n = 2$, et la formule (c) devient ainsi

$$(e) \qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha'\cos\theta).$$

6. *Détermination de la constante k.* — On déduit de l'expérience que *l'action d'un courant fermé sur un courant en arc de cercle est normale à cet arc en son milieu,* et, comme conséquence, que *l'action d'un courant fermé sur un élément de courant est normale à cet élément.*

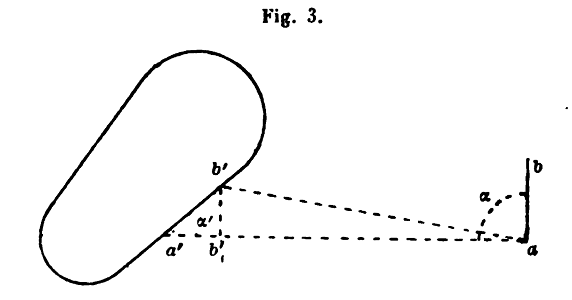
Soient (*fig.* 3)

$a'b' = ds'$ un élément du courant fermé ;
$ab = ds$ l'élément sur lequel agit ce courant ;
b'_1 la projection de b' sur $a'a$.

Conservons d'ailleurs les notations qui précèdent.

En vertu de la formule (e), la composante de l'action exercée

Fig. 3.



par $a'b'$ sur l'élément ab, estimée suivant cet élément, a pour expression

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta)\cos\alpha.$$

Or on a

$$ds' = \frac{a'b'_1}{\cos\alpha'} = -\frac{dr}{\cos\alpha'},$$

et l'expression ci-dessus devient

$$(f) \qquad ii'\,ds\left(k\cos^2\alpha\, d\frac{1}{r} - \sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha'\cos\theta\frac{dr}{r^2}\right).$$

L'angle trièdre formé par les directions des droites aa', ab', ab donne

$$(g) \qquad \cos\widehat{bab'} = \cos\widehat{baa'}\cos\widehat{b'aa'} + \sin\widehat{baa'}\sin\widehat{b'aa'}\cos\theta.$$

Or on a

$$\widehat{bab'} = \alpha + d\alpha, \quad \cos\widehat{bab'} = \cos\alpha + d\cos\alpha,$$

$$\widehat{b'aa'} = \frac{b'b'_1}{r} = -\frac{dr}{r}\tan\alpha',$$

et la formule (g) se réduit à la suivante :

$$d\cos\alpha = -\frac{dr}{r}\sin\alpha\tan\alpha'\cos\theta.$$

En ayant égard à cette relation, l'expression (f) devient

$$ii'\,ds\left(k\cos^2\alpha\,d\frac{1}{r}+\frac{1}{2r}\,d\cos^2\alpha\right).$$

Si l'on intègre cette expression et le premier terme par parties, on trouve, pour un courant quelconque fermé ou non,

$$(h)\qquad ii'\,ds\left[\frac{k}{r}\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{2}-k\right)\int\frac{d\cos^2\alpha}{r}\right]+\text{const}\,C.$$

Cette intégrale doit être nulle, en partant d'un point d'un courant fermé pour revenir au même point, quelle que soit la forme du courant ou la relation qui doit exister entre r et α. Or, le premier terme donnant un résultat nul, il faut, pour que le second terme s'annule, que l'on ait

$$k=\frac{1}{2},$$

et alors l'expression (c) se réduit à la suivante:

$$(\text{i})\qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{2}+\sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta\right).$$

Remarque. — La valeur positive obtenue pour k signifie que l'action mutuelle de deux éléments de courants en ligne droite est une attraction ou une répulsion, selon que les deux courants sont de sens contraire ou de même sens.

7. *Nouvelle expression de l'action mutuelle de deux éléments de courants* — Considérons un courant quelconque non fermé, auquel la formule (h) est applicable. En faisant dans cette formule $k=\frac{1}{2}$, on obtient pour la composante suivant ds de l'action exercée par le courant sur cet élément

$$\frac{ii'}{2}\frac{ds}{r}\cos^2\alpha+C.$$

Si le courant se réduit à un élément ds', cette composante se réduit

elle-même à

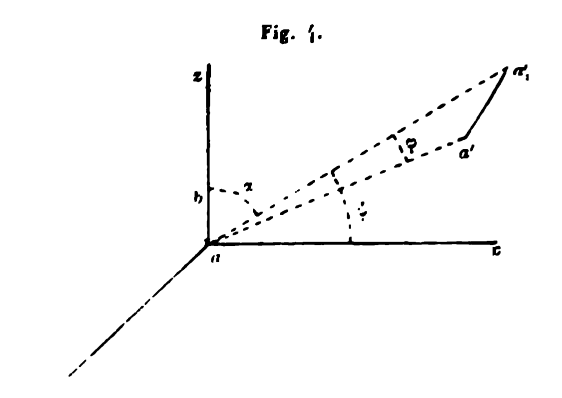
$$\frac{ii'}{2} ds\, d\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

Enfin l'action totale de ds' sur ds suivant la direction de r a pour expression

$$\frac{ii'}{2}\frac{ds}{\cos\alpha}\, d\frac{\cos^2\alpha}{r}. \tag{2}$$

8. *Action d'un courant fermé sur un élément de courant.* — Prenons pour origine des coordonnées (*fig.* 4) l'extrémité a du courant élé-

Fig. 4.



mentaire $ab = ds$, par laquelle arrive le courant, et pour axe des z la direction de ab. Nous rappellerons que l'action résultante exercée par le courant fermé sur ab est située dans le plan xay.

La composante suivant ax de l'action exercée par un élément $a'b'$ de ce courant sur ds est, d'après le numéro précédent,

$$\frac{ii'\,ds}{2\cos\alpha}\cos\widehat{a'ax}\, d\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

En intégrant par parties il vient, pour la projection sur ax, de la résultante cherchée,

$$\frac{ii'\,ds}{2}\left(\cos\alpha\cos\widehat{a'ax} - \int\frac{\cos^2\alpha}{r}\, d\frac{\cos\widehat{a'ax}}{\cos\alpha}\right)$$

ou simplement

$$(i) \qquad -ii'\frac{ds}{2}\int \frac{\cos^2\alpha}{r}\, d\,\frac{\cos\widehat{a'ax}}{\cos\alpha},$$

puisque le courant est fermé.

Soient φ l'angle formé par aa' avec sa projection aa'_1 sur le plan xaz; ψ l'angle $\widehat{a'_1ax}$. Les angles trièdres rectangles déterminés par az, aa', aa'_1 et par aa'_1, aa', ax donnent

$$\cos\alpha = \cos\varphi\sin\psi,$$
$$\cos\widehat{a'ax} = \cos\varphi\cos\psi,$$

et l'expression (i) se réduit à la suivante,

$$(3) \qquad ii'\,ds\,A'_y,$$

en posant

$$(4) \qquad \int \frac{1}{2}\,\frac{r^2\cos^2\varphi\, d\psi}{r^3} = A'_y.$$

Cette intégrale représente la somme des aires élémentaires du cône déterminé par le sommet a et par le courant fermé, projetées sur le plan zax et divisées par r^3.

Si l'on porte à partir du point a, sur la perpendiculaire élevée en ce point à l'aire élémentaire $aa'b'$, une longueur proportionnelle à cette aire divisée par le cube de la distance r, et si A' désigne la somme géométrique de toutes les longueurs semblables, A'_y ne sera autre chose que la projection de A' sur ay.

En désignant par A'_x la projection de A' sur ax, on trouve, de la même manière que ci-dessus, pour la composante de l'action cherchée suivant ay,

$$(3') \qquad ii_1\,ds\,A'_x$$

On voit, d'après ce qui précède, que le problème proposé se ramène

à déterminer A′ en grandeur et en direction, en choisissant convenablement trois axes rectangulaires (qui différeront généralement des précédents), de manière à ramener les calculs à leur plus grande simplicité.

9. *Action sur un élément de courant d'un courant circulaire dont le rayon est très petit par rapport à la distance du centre à l'élément considéré.*

Le problème dont il s'agit se réduit, ainsi que nous venons de le dire, à déterminer les projections de A′ sur trois axes rectangulaires passant par l'extrémité a de l'élément ds.

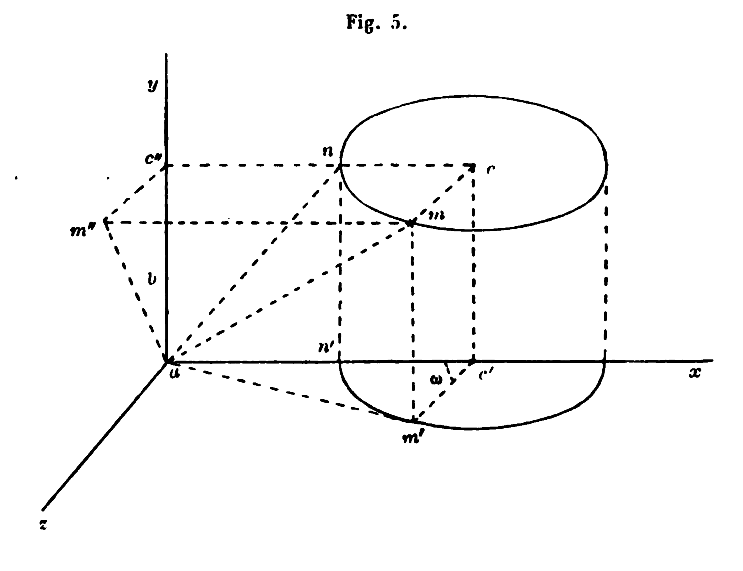
Nous prendrons le plan xaz parallèle à celui du courant circulaire, et nous ferons passer le plan yax par le centre c de la circonférence. Il est évident que l'on a

$$A'_z = 0.$$

Soient

c', m' les projections sur le plan xaz de c et d'un point quelconque m de la circonférence;

Fig. 5.



c'', m'' les projections de c et m sur le plan yaz;
n l'intersection de cc'' avec la circonférence, et n' sa projection sur ax;

ω l'angle $\widehat{ncm} = \widehat{n'c'm'}$;
h la hauteur cc';
ρ' le rayon de la circonférence;
l la distance ac';
$u = \sqrt{l^2 + h^2}$ la distance ac.

Nous admettrons que le courant circulaire aille de la droite vers la gauche, sens qui sera aussi pour nous celui des aires en projection sur les plans coordonnés, comme au numéro précédent.

Nous avons

$$(j) \qquad A'_y = -\int \overline{am}^3 \, d\,\text{aire}\, an'm', \quad A'_x = \int \overline{am}^3 \, d\,\text{aire}\, am''c''.$$

Or

$$\text{aire}\, an'm' = \text{aire}\, am'c' - \text{aire}\, n'm'c' = \frac{\rho'}{2}(l \sin\omega - \rho'\omega),$$

$$\text{aire}\, am''c'' = h\frac{m''c''}{2} = h\rho'\frac{\sin\omega}{2},$$

d'où

$$(k) \qquad \begin{cases} d.\,\text{aire}\, an'm' = \dfrac{\rho'}{2}(l\cos\omega - \rho')\,d\omega, \\ d.\,\text{aire}\, am''c'' = \dfrac{\rho' h}{2}\cos\omega\, d\omega. \end{cases}$$

Nous avons en outre, en négligeant les puissances de $\frac{\rho}{h}$, $\frac{\rho}{u}$ supérieures à la première,

$$(l) \qquad \begin{cases} \overline{am}^{-3} = \left(\overline{am'}^2 + h^2\right)^{-\frac{3}{2}} = (\rho'^2 + l^2 + h^2 - 2l\rho'\cos\omega)^{-\frac{3}{2}} \\ \phantom{\overline{am}^{-3}} = (\rho'^2 + u^2 - 2l\rho'\cos\omega)^{-\frac{3}{2}} = u^{-3}\left(1 + \dfrac{3l\rho'}{u^2}\cos\omega\right). \end{cases}$$

En faisant les substitutions (k) et (l) dans les formules (j), puis intégrant entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, en remarquant que $l^2 = u^2 - h^2$, on trouve

$$(5) \qquad \begin{cases} A'_y = -\dfrac{\pi\rho'^2}{u^3}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{u^2} - 1\right) = -\dfrac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(1 - \dfrac{3h^2}{u^2}\right), \\ A'_x = \dfrac{3}{2}\pi\rho'^2\dfrac{lh}{u^5}. \end{cases}$$

Soient A'_v la projection de A' sur une droite quelconque av ; γ, δ les angles que forme cette droite avec ax et ay. Nous avons

$$A'_v = A'_x \cos\gamma + A'_y \cos\delta = -\frac{\pi\rho'^2}{2u^3}[\cos\delta - 3h(l\cos\gamma + h\cos\delta)],$$

ou, en désignant par p la distance du centre c au plan mené en a normalement à av,

$$(6) \qquad A'_v = -\frac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(\cos\delta - \frac{3ph}{u^2}\right),$$

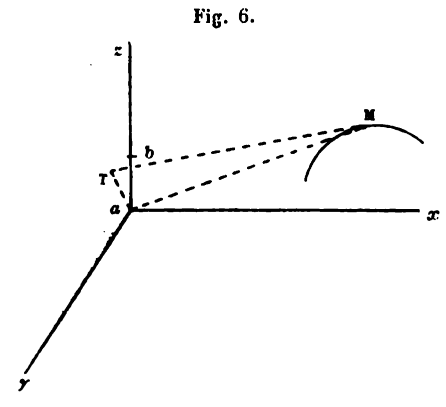
formule dans laquelle il ne faut pas perdre de vue que δ est l'angle que forme av avec l'axe du courant circulaire.

10. *Action d'un solénoïde sur un élément de courant.* — Nous rappellerons qu'un solénoïde peut être considéré comme étant un système de courants circulaires identiques d'un très petit rayon, très peu espacés, normaux à une courbe directrice, quelle qu'elle soit d'ailleurs, et qui est le lieu de leurs centres

Soient (*fig.* 6).

x, y, z les coordonnées d'un point u de la courbe directrice rapportée

Fig. 6.



à trois axes retangulaires ayant a pour origine, l'axe az étant, comme au n° **8**, dirigé suivant ab ;

$d\sigma$ l'arc élémentaire de cette courbe ;

aT la perpendiculaire abaissée de l'origine a sur la tangente MT en M.

Considérons le courant circulaire dont le centre est M.

Si nous faisons coïncider l'axe av du numéro précédent avec ay, nous aurons

$$\cos\delta = \frac{dy}{d\sigma}, \quad p = y, \quad h = u \cos\widehat{\text{TMO}} = u\frac{du}{d\sigma},$$

et par suite

$$A'_y = -\frac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(\frac{dy}{d\sigma} - \frac{3y}{u^2}\frac{du}{d\sigma}\right) = -\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\left(\frac{dy}{u^3} - 3y\frac{du}{u^4}\right),$$

ou encore

(m) $$A'_y = -\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{y}{u^3};$$

on a de même

(m') $$A'_x = \frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{x}{u^3}.$$

D'après le n° **8**, nous aurons ainsi, pour les composantes suivant ax et ay de l'action du courant circulaire considéré,

(n) $$-ii'ds\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{y}{u^3},$$

(n') $$ii'ds\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{x}{u^3}.$$

Soient

g' la distance constante de deux courants circulaires consécutifs;

P', P'_1 les extrémités de la courbe directrice ou les *pôles* du solénoïde;

x', y', u' et x'_1, y'_1, u'_1 les valeurs de x, y, u qui se rapportent respectivement à ces deux points. Nous mesurerons σ à partir de P'.

Le nombre des courants circulaires dont les centres sont situés sur σ est $\frac{\sigma}{g}$ et sur $d\sigma$

(p) $$\frac{d\sigma}{g} \text{ (1)}.$$

(1) Cette manière de procéder laisse sans doute à désirer lorsque g' n'est pas infiniment petit; mais, lorsqu'il n'en est pas ainsi, on fera tomber toutes les ob-

Posons

$$(7)\qquad \mu' = \frac{i'\pi\rho'^2}{2g'},$$

constante qui ne dépend que de la nature du solénoïde.

En multipliant par la valeur (p) les expressions (n) et (n'), nous obtiendrons, pour les composantes de l'action exercée sur ds par les courants circulaires correspondant à $d\sigma$,

$$(q)\qquad \begin{cases} -\mu' i\, d\dfrac{y}{u^3} & \text{suivant } ax, \\ \mu' i\, d\dfrac{x}{u^3} & \text{suivant } ay. \end{cases}$$

En intégrant ces expressions entre les limites qui se rapportent aux points P'_1 et P', nous aurons, pour les composantes suivant ax et ay de l'action cherchée,

$$(8)\qquad \begin{cases} dX = \mu' i\left(\dfrac{y'}{u'^3} - \dfrac{y'_1}{u'^3_1}\right) ds, \\ dY = \mu' i\left(\dfrac{x'_1}{u'^3_1} - \dfrac{x'}{u'^3}\right) ds. \end{cases}$$

On voit ainsi que cette action ne dépend que des positions relatives des pôles par rapport à ds, et non de la forme de la courbe directrice. On peut même considérer chacun des pôles comme exerçant sur ds une action spéciale, soit par exemple, pour le pôle P',

$$(9)\qquad \begin{cases} dX' = \mu' i\, \dfrac{y'}{u'^3}\, ds, \\ dY' = -\mu' i\, \dfrac{x'}{u'^3}\, ds. \end{cases}$$

---

jections en considérant $d\sigma$, non comme une différentielle, mais comme une longueur assez petite pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la première, et assez grande cependant pour comprendre un certain nombre de courants circulaires.

Comment, d'ailleurs, pourrait-on comprendre qu'un parallélépipède élémentaire pût renfermer une certaine quantité de matière nécessairement discontinue, si l'on admettait que ses dimensions fussent nulles, au lieu de les considérer comme très petites, quoique supérieures aux intervalles intermoléculaires.

On déduit de là

$$\frac{dY'}{dX'} = -\frac{x'}{y'},$$

ce qui signifie que *chaque pôle exerce sur l'élément de courant une action normale au plan mené par l'élément et le pôle.*

Si nous faisons passer le plan zOy par ab et P', l'action exercée par le pôle considéré, que nous représenterons par dR', se réduira à dX', et nous aurons

$$dR' = \mu' i \frac{y'}{u'^3} ds.$$

Si η désigne l'angle formé par ab avec u', on a

$$y' = u' \sin\eta,$$

et, en supprimant l'accent de u devenu inutile, la formule précédente devient

$$(10) \qquad dR' = \mu' i \frac{\sin\eta}{u^2} ds,$$

d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

11. *Action d'un courant fermé sur l'un des pôles d'un solénoïde.* —

Soient (*fig.* 7)

P' le pôle considéré ;
$ab = ds$ un élément du courant fermé ;
b' la projection de b sur aP' ;
$d\theta$ l'angle $ab'P'$.

L'action dR exercée par ab sur P', égale et contraire à dR', est perpendiculaire au plan abP' et a pour expression

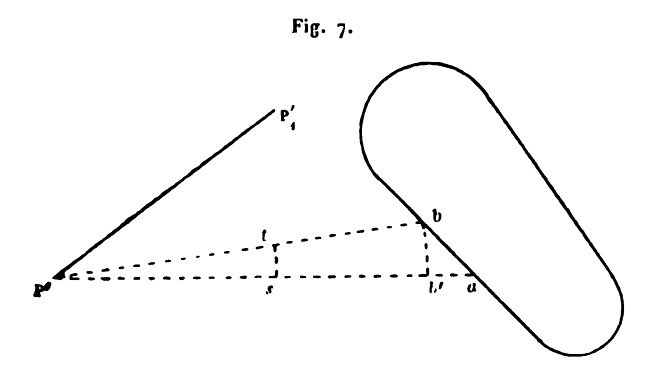
$$(10') \qquad dR = \mu' i \frac{ab \sin baP'}{\overline{aP'}^2} = \mu' i \frac{bb'}{\overline{aP'}^2},$$

ou, comme $bb' = aP'.d\theta$,

$$dR = \mu' i \frac{d\theta}{aP'}.$$

En transportant cette force parallèlement à elle-même en P', il en résultera un couple dont l'axe du moment $\mu' i\, d\theta$ ne sera autre chose que l'élément st, limité par aP', bP', de l'intersection de la sphère dont le centre est P' et le rayon $\mu' i$ avec la surface du cône déterminé par le

Fig. 7.



courant fermé et par le sommet P'. Or, tous les axes tels que st des couples élémentaires déterminant une courbe fermée, l'axe du couple résultant est nul. Donc :

L'action d'un courant fermé sur l'un des pôles d'un solénoïde se réduit à une force passant par ce pôle.

L'action du courant n'est donc autre chose que la résultante des forces dR appliquées en ce point.

L'expression (10') peut se mettre sous la forme suivante, en désignant par $d\alpha$ l'aire abc,

$$dR = 2\mu' i \frac{\text{aire } abc}{\overline{aP'}^3} = 2\mu' i \frac{d\alpha}{\overline{aP'}^3}.$$

Soient P'x, P'y, Pz' trois axes rectangulaires menés par le point P'; $d\alpha_x$, $d\alpha_y$, $d\alpha_z$ les projections de l'aire $d\alpha$ sur les plans zP'y, xP'z, yP'x. La composante de dR suivant P'x sera

$$dX = 2\mu' i \frac{d\alpha_x}{\overline{aP'}^3},$$

d'où, pour la composante semblable de l'action exercée par le courant,

$$X = 2\mu' i \int \frac{d\alpha_x}{\overline{aP'}^3}.$$

Portons sur la normale au plan $bP'a$, à partir de P', une longueur égale à $\frac{da}{\overline{aP'}^3}$, et soient A la somme géométrique de toutes les droites ainsi obtenues; A_x, A_y, A_z les projections de cette résultante sur $P'x$, $P'y$, $P'z$; nous aurons évidemment

(11)
$$\left\{\begin{array}{l} X = 2\mu' i A_x, \\ \text{et de même} \\ Y = 2\mu' i A_y, \\ Z = 2\mu' i A_z, \end{array}\right.$$

12. *Action d'un solénoïde sur l'un des pôles d'un autre solénoïde.* — Soient

PP_1 le premier solénoïde;
ρ le rayon des courants circulaires qui le constituent;
g l'équidistance de ces courants;
P' le pôle, du second solénoïde $P'P'_1$, que nous avons à considérer.

Soient, de plus, σ l'arc de la courbe directrice de PP_1 mesuré à partir du point P jusqu'à un point M quelconque dont les coordonnées sont x, y, z.

Il est clair, d'après la signification même de A, que A_x sera donné par la formule (m') du n° **10**, en y remplaçant ρ' par ρ et supposant $u =$ P'M. Nous avons donc

$$A_x = \frac{\pi\rho^2}{2\,d\sigma}\,d\frac{x}{u^3}.$$

Portons cette valeur dans la première des formules (11), multiplions-la ensuite par le nombre des courants $\frac{d\sigma}{g}$ compris dans $d\sigma$ pour avoir la composante relative à cet élément, et posons

$$\mu = \frac{i\pi\rho^2}{2g};$$

nous obtiendrons

(12)
$$X = 2\mu\mu' d\frac{x}{u^3}.$$

Soient

x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P;
x_1, y_1, z_1 celles de P_1;
$u_0 = PP'$, $u_1 = P_1P'$;
χ, η, ζ les composantes de l'action totale exercée par PP_1 sur P', estimées suivant $P'x$, $P'y$, $P'z$.

Nous aurons, en intégrant l'équation (12).

(10)
$$\chi = 2\mu\mu'\left(\frac{x_1}{u_1^3} - \frac{x_0}{u_0^3}\right),$$
et de même
$$\eta = 2\mu\mu'\left(\frac{y_1}{u_1^3} - \frac{y_0}{u_0^3}\right),$$
$$\zeta = 2\mu\mu'\left(\frac{z_1}{u_1^3} - \frac{z_0}{u_0^3}\right).$$

Il résulte de là que P, P_1 exercent sur P' deux actions distinctes $\frac{2\mu\mu'}{u_0^2}$, $\frac{2\mu\mu'}{u_1^2}$, variant en raison inverse du carré de la distance, dirigées respectivement suivant PP', P_1P', et que si la première, par exemple, est une attraction, l'autre sera une répulsion. Mais, P' exerçant par suite une attraction sur P, P'_1 exercera sur ce pôle une répulsion et une attraction sur P_1.

Il y a donc, en résumé, quatre forces en jeu sur lesquelles il nous paraît inutile d'insister; qu'il nous suffise de rappeler que, en définitive, deux solénoïdes placés à une distance suffisamment grande l'un de l'autre par rapport à leurs diamètres se comportent entre eux comme deux aimants.

Tel est l'exposé succinct de la partie essentielle de la théorie d'Ampère. Nous avons omis à dessein les questions relatives aux actions mutuelles et au mouvement de deux courants rectilignes situés ou non dans un même plan, parallèles ou non, d'un courant circulaire sur son diamètre, etc., questions dont les solutions sont trop simples pour que nous ayons cru devoir nous en occuper.

CAPILLARITÉ.

CAPILLARITÉ.

1. On s'occupe peu actuellement de la théorie mathématique de la capillarité, fondée réellement par Laplace et développée par Poisson, dont l'Ouvrage, publié en 1831, est un véritable monument.

La lecture de la nouvelle théorie de l'action capillaire de Poisson est pénible; on ne retrouve pas dans ce travail la régularité didactique et la coordination remarquable qui caractérisent les autres publications de l'illustre géomètre ([1]). Il établit d'ailleurs l'équation de la surface capillaire et la constance de l'angle que forme cette surface avec une paroi d'une nature donnée d'une manière telle, que l'étude de sa solution de ce double problème exige un travail considérable. Enfin, lorsqu'il traite les questions soulevées par les physiciens de son époque, parmi lesquels Gay-Lussac joue le premier rôle, il emploie constamment les mêmes variables, au lieu d'approprier le choix des variables à la nature de chaque problème, en vue d'arriver plus rapidement et plus nettement à la solution.

Depuis 1831, le domaine physique de la capillarité s'est considérablement agrandi. Les travaux de M. Plateau sur la forme naturelle des

---

([1]) Ce qui tendrait à faire supposer que l'ouvrage dont il s'agit est la réunion de Mémoires successifs sans que l'auteur ait eu d'avance un plan bien arrêté

liquides et des bulles creuses de liquides visqueux, les expériences de M. Boutigny sur les globules liquides formés sur des plaques portées à une température telle que le contact n'ait pas lieu, etc., font époque dans l'histoire de la Physique.

Il m'a semblé qu'il ne serait pas sans intérêt de mettre la théorie des phénomènes capillaires au courant des progrès réalisés, en la rendant, par sa simplicité, très accessible aux jeunes géomètres, et c'est à ce point de vue que je vais me placer.

I. — *Formules fondamentales.*

2. *Forme de la surface capillaire.* — Soient (*fig.* 1)

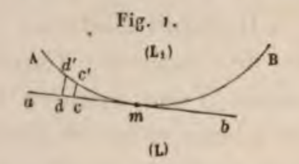
AmB une section normale faite en un point m, dont la masse est représentée par la même lettre, de la surface de séparation de deux fluides (L_1) et (L), la concavité étant tournée vers (L_1);

ab la trace du plan tangent en m;

Π_1, Π les poids spécifiques des deux fluides.

Nous ne considérerons que le cas où les forces extérieures agissant

Fig. 1.



sur chaque point m de (L) et (L_1) dérivent d'un potentiel $m\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ étant une fonction des coordonnées de ce point.

Le point m est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des actions qu'il reçoit des molécules de (L_1) et (L).

On peut considérer la résultante des actions moléculaires de (L_1) sur m comme étant due à celle Q_1 de ce fluide, dans l'hypothèse où ab serait la surface de séparation, et à la résultante prise en sens contraire $-Q'_1$ des actions provenant des molécules du ménisque.

Si nous désignons pour (L) par Q et Q' les équivalents de Q_1 et Q'_1, l'action exercée par ce fluide sur m sera de même la résultante de Q

et Q′; de sorte que les forces Q, Q′, Q_1, $-Q'_1$ et les forces extérieures doivent se faire équilibre sur le point m.

Nous supposerons, avec Laplace, Gauss et Lamé, que (L), (L_1) sont homogènes dans toute leur masse, tandis que, par des considérations très contestables, Poisson est conduit à admettre que la densité des deux fluides subit une altération dans le voisinage de la surface de séparation. Les forces Q et Q_1 seront ainsi considérées comme normales à AmB.

Il faut donc, pour l'équilibre, que la résultante de Q′, $-Q'_1$ et de la force extérieure agissant sur m soit aussi normale à la surface, ou que le travail élémentaire de ces trois forces soit nul pour un déplacement de m sur cette surface ou encore que la somme de $m\mathfrak{F}$ et du potentiel des actions du ménisque de (L) sur m et de celles du ménisque de (L_1) prises en sens contraire soit constante pour tout point de la surface.

Le potentiel de l'action de la molécule m' du ménisque de (L) sur m est de la forme $mm'f(r)$, $f(r)$ étant une certaine fonction de la distance r de ces deux molécules.

Considérons un élément de volume de ce ménisque, limité par deux plans normaux en m faisant entre eux un angle infiniment petit $d\theta$ et par deux cylindres concentriques; soient c, d les intersections avec ab et c', d' les intersections avec AB des génératrices de ces cylindres comprises dans le plan de la figure et situées d'un même côté de m. Si l'on remarque que le rayon γ de la sphère d'activité est extrêmement petit, on peut supposer $r = \overline{mc}$, et par suite $\overline{cd} = dr$; le potentiel dû à l'action de la masse déterminée par l'élément de volume est, par suite,

$$m\frac{\Pi}{g}f(r)\,\overline{cc'}\,r\,d\theta\,dr,$$

et, pour toute la portion du ménisque limitée par les deux plans normaux,

$$m\frac{\Pi}{g}\,d\theta\int_0^\gamma f(r)\,\overline{cc'}\,r\,dr$$

Mais comme, en appelant $\mathfrak{r}$ le rayon de courbure de l'une des sections

normales, on a

$$\overline{cc'} = \frac{r^2}{2\iota},$$

l'expression ci-dessus devient

$$m\frac{\Pi}{g}\frac{d\theta}{2\iota}\int_0^{\gamma} f(r)\, r^2\, dr = m\frac{d\theta}{\iota}k,$$

en posant

$$\Pi\frac{\Pi}{2g}\int_0^{\gamma} f(r) r^2\, dr = k,$$

k étant une constante spécifique.

Soient R, R′ les rayons de courbure principaux en m de la surface; l'angle θ étant censé mesuré à partir de la trace sur le plan tangent du plan normal correspondant au premier de ces rayons, on a

$$\frac{1}{\iota} = \frac{\cos^2\theta}{R} + \frac{\sin^2\theta}{R'},$$

et le potentiel pour tout le ménisque est

$$m\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{R} + \frac{\sin^2\theta}{R'}\right) d\theta = mk\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Le potentiel du ménisque de (L_1) pourra se représenter de la même manière par

$$mk_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si donc on appelle mC une constante, nous aurons

$$mk\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - mk_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + m\mathcal{J} + mC = 0,$$

d'où

$$K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\Pi}{g}(\mathcal{J} + C),$$

en posant

$$\frac{\Pi}{g}(k - k_1) = K.$$

L'équation ci-dessus est celle de la surface AmB ou de ce que l'on

appelle la *surface capillaire*. En la mettant sous la forme

$$\frac{\Pi}{g}\mathfrak{F} - K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \text{const.},$$

on reconnaît sans peine que l'influence du ménisque se traduit par une diminution de pression positive ou négative au point m de la surface, représentée par

$$K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

En attribuant des signes à R et R' en raison du sens de la courbure de l'une et de l'autre des sections normales, l'équation de la surface peut se mettre sous la forme suivante,

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(\mathfrak{F} + C)}{\mu},$$

μ étant une constante positive dépendant de la nature de (L) et (L_1), que l'expérience seule peut faire connaître, et C une constante arbitraire dont on déterminera la valeur dans chaque problème par les conditions aux limites.

Dans le cas où la force extérieure est la pesanteur, l'équation (1) devient, en posant $\frac{g}{\mu} = \frac{1}{a^2}$,

$$(2) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(y + \lambda)}{a^2},$$

y étant la distance du point m à un plan horizontal déterminé, et λ une constante remplaçant C.

3. *Influence d'une paroi sur la surface de contact.* — Prenons pour plan de la figure le plan normal au point m de l'intersection de la paroi et de la surface.

Soient

mn, aa_1 (*fig.* 2) les tangentes en m aux deux sections faites respectivement dans ces deux surfaces par le plan de la figure;

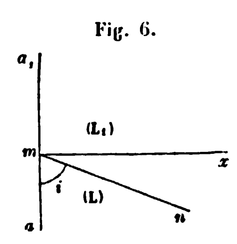
i l'inclinaison de mn sur ma dans (L);

mx la normale à la paroi, dont la substance est censée homogène.

Si la paroi était un plan indéfini, son action $m.N$ sur m serait dirigée suivant Ox, et N serait une constante.

Quelle que soit la forme de la paroi, on peut également considérer N

Fig. 6.



comme constant, car il est clair que les actions sur m exercées par les molécules du ménisque de la paroi ne peuvent donner, suivant Ox, que des composantes de l'ordre de quantités que l'on peut négliger.

Nous négligerons également l'influence des ménisques de (L) et (L_1), qui est relativement faible, dans la détermination de la composante suivant mx de l'action qu'exercent les deux fluides sur m.

Soient $mm'f(r)$ l'action exercée par une molécule m' de (L) sur m, r étant la distance des deux molécules.

Concevons dans (L) un cône ayant m pour sommet, d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, dont les génératrices fassent à un infiniment petit près l'angle α avec mn. La masse élémentaire $\frac{\Pi}{g} r^2\, d\omega\, dr$ de ce cône donne suivant mx la composante

$$m \frac{\Pi}{g} r^2\, d\omega\, dr f(r) \cos\alpha,$$

et l'on a pour tout le cône

$$m \frac{\Pi}{g} d\omega \cos\alpha \int_0 f(r) r^2\, dr = mq\, d\omega \cos\alpha,$$

q étant une constante dépendant de la nature de (L).

Il vient, par suite, pour la composante normale totale due à l'action de ce fluide,

$$mq \int \cos\alpha\, d\omega,$$

l'intégrale se rapportant au fuseau sphérique de centre m d'un rayon

égal à l'unité, limité par les plans *mn*, *ma* ; mais cette intégrale n'est autre chose que la projection du fuseau sur un plan perpendiculaire à mx, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos i$. L'expression ci-dessus devient donc

$$mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i).$$

En appelant q_1 l'équivalent de q pour (L_1), ce fluide donne de même la composante normale

$$mq\frac{\pi}{2}(1 + \cos i).$$

On a donc, en faisant abstraction des forces extérieures, dont l'influence est relativement très faible,

$$mN + mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i) + mq_1\frac{\Pi}{2}(1 + \cos i) = 0,$$

d'où

$$\cos i = \frac{2N + \pi(q + q_1)}{\pi(q - q_1)},$$

et l'angle i est ainsi constant.

4. *Rappel des résultats de l'expérience.* — Dans tout ce qui suit, nous prendrons le millimètre pour unité linéaire.

D'après l'expérience, on a

	a.	$2a^2$.
	mm	
Pour l'eau	2,826	15,5861
Pour une dissolution saturée de sel marin	2,569	13,20
Pour l'acide azotique	2,366	11,20
Pour l'acide chlorhydrique	2,291	10,50
Pour le mercure	1,811	6,528
Pour l'alcool	1,732	6,00
Pour l'huile de lavande	1,693	5,60

Si nous désignons par α l'angle aigu de raccordement que forme un liquide avec une paroi, on a

	α.
Pour le verre ordinaire et le mercure (surface convexe)	45°.30′
Pour le verre privé d'air et le mercure »	55.00
Pour l'acier et l'alcool »	90.00
Pour le verre et l'eau (surface concave)	0.00

Nous dirons qu'un liquide mouille ou ne mouille pas une paroi, selon que sa surface sera concave ou convexe dans la région du contact avec la paroi.

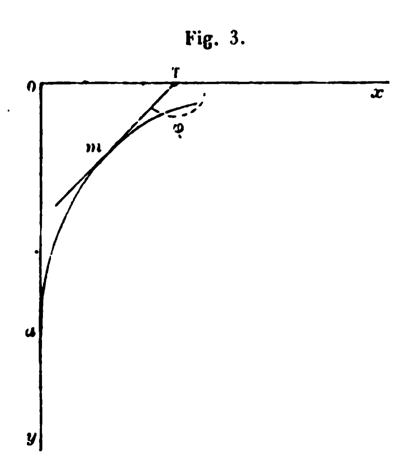
§ II. — *Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants.*

5. *Forme que prend la surface d'un liquide au contact d'une lame verticale.* — Nous supposerons que la lame est suffisamment longue, dans le sens horizontal, pour que ses extrémités n'influent pas d'une manière sensible sur la forme de la partie moyenne de la surface que l'on peut dès lors regarder comme cylindrique.

Le tout se réduit donc à considérer une section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'intersection de la lame avec le niveau statique du liquide.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la surface est convexe; les

Fig. 3.



formules obtenues s'appliqueront à la concavité en changeant le sens positif de l'axe des y.

Soient (*fig.* 3)

Ox et Oy l'horizontale et la verticale du point d'intersection O de la lame et du niveau;

x, y les coordonnées d'un point quelconque m de la courbe;

φ l'angle que forme la tangente en ce point avec Ox;
a l'intersection de la courbe avec Oy;
s l'arc am;
α l'angle de raccordement en a.

On a évidemment

$$dy = -ds\sin\varphi, \quad dx = -ds\cos\varphi, \quad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

On doit supposer, dans la formule (2), $R' = \infty$ et, en raison de l'interprétation donnée à la courbure à la surface, $\lambda = 0$, d'où successivement

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}(1+\cos\varphi),$$

en remarquant que $\frac{d\varphi}{ds}$ est nul avec y, c'est-à-dire pour $\varphi = 180°$. On tire de là

$$ds = \frac{a}{2}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$dy = -a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi,$$

et, comme y est nul pour $\varphi = 180°$, il vient

$$(a) \qquad y = 2a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Nous avons maintenant

$$dx = -\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = -a\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi,$$

d'où

$$x = -a\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \log\frac{1+\tang\frac{\varphi}{4}}{1-\tang\frac{\varphi}{4}}\right) + \text{const}.$$

Mais on doit avoir $x = 0$ pour $\varphi = \alpha$, et par suite

$$(b)\qquad x = a\left[2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right) + \log\left(\frac{1+\tang\frac{\alpha}{4}}{1-\tang\frac{\alpha}{4}} \times \frac{1-\tang\frac{\varphi}{4}}{1+\tang\frac{\varphi}{4}}\right)\right].$$

Comme x est infini pour $\varphi = 180^\circ$, on voit qu'au point de vue géométrique la courbe est asymptotique au niveau; cette courbe est d'ailleurs complètement définie par les équations (a) et (b).

Si nous désignons par y_0 l'abaissement du liquide au contact de la lame, nous avons

$$(c)\qquad y_0 = 2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

soit $y_0 = 3^{mm},22$ pour le mercure et une lame de verre.

L'élévation de l'eau au contact d'une lame de verre est

$$y_0 = 5^{mm},652.$$

6. *Forme de la surface d'un liquide entre deux lames verticales parallèles, dont l'une est mouillée et l'autre non mouillée par le liquide.*

Soient (*fig.* 4)

xx' le profil du niveau;

aOa' celui de la surface du liquide entre les deux lames, la partie Oa de ce profil correspondant à la direction de Ox se trouvant au-dessus du niveau;

Oy, Oy' les portions de la verticale du point O situées respectivement au-dessus et au-dessous du niveau.

Nous rapporterons respectivement les courbes Oa, Oa' aux axes Oy, Ox et Oy', Ox', en conservant les notations du numéro précédent.

Nous avons, pour Oa,

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi,\quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

et

$$(a)\qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y}{a^2},$$

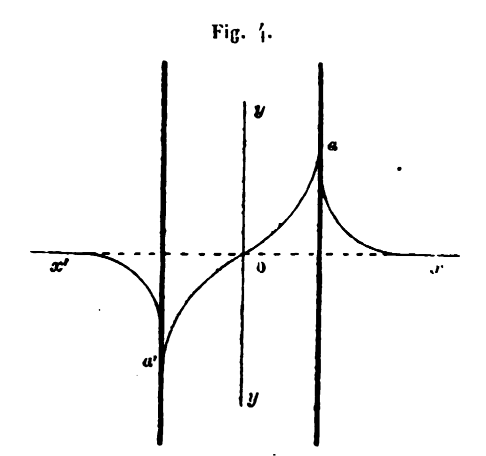
d'où

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$(b) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = -\frac{\cos\varphi}{a^2} + \text{const.}$$

Si nous désignons par φ_0 la valeur de φ correspondant au point O,

Fig. 4.



comme, d'après la formule (a), on a $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ pour $y = 0$, la formule (b) se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

d'où

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

$$dx = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

$$dy = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

et

$$(c) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right), \\ y &= a\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Soit x_1 la distance du point O à la lame considérée ; nous aurons

$$(f)\quad x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right).$$

En accentuant les lettres a, x_1 et α pour l'autre lame, nous aurons de même

$$x'_1 = \frac{a'}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right).$$

Enfin, si nous désignons par $2e$ la distance $x_1 + x'_1$ des deux lames, l'angle φ_0 sera déterminé par l'équation

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} & a\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) \\ & + a'\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) = 2e\sqrt{2}, \end{aligned}\right.$$

qui dépend généralement de *s* fonctions elliptiques, et dont la solution ne peut se trouver que dans chaque cas particulier.

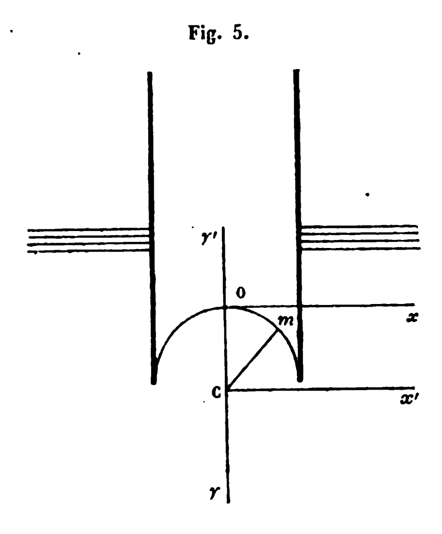
Supposons que les deux liquides soient l'eau et le mercure et que les deux lames soient en verre; nous aurons $\alpha = 0$ et, à $30'$ près, $\alpha' = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$\begin{aligned} & \frac{2,286}{\sqrt{2}}\left(2\,\text{logtang}\,\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{2} - 2\,\text{logtang}\,\frac{\varphi_0}{2} - 4\cos\frac{\varphi_0}{2}\right) \\ & \quad - 1,811\left(\cos\varphi_0 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) = 2e\sqrt{2}, \end{aligned}$$

équation dont il nous paraîtrait superflu de faire des applications numériques.

7. *Forme d'un liquide entre deux lames parallèles de même nature.* — Prenons pour origine des coordonnées le point maximum O du profil de la surface, et soient Ox la tangente en ce point et Oy la verticale

Fig. 5.



du même point. Conservons d'ailleurs les notations précédentes. L'équation (2) nous donne

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a^2}(y + \lambda),$$

λ désignant ici la hauteur du point O en contre-bas du niveau.

On déduit de là

$$(b) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{ds^2} = \dfrac{1}{a^2}\sin\varphi, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi^2}{ds^2} = \dfrac{1}{a^2}(C - \cos\varphi), \end{cases}$$

C étant une constante au moyen de laquelle λ s'exprimera, en remarquant que les formules (*a*), (*b*) doivent donner la même valeur pour $\frac{d\varphi}{ds}$, en y supposant $y = 0$ et $\varphi = 0$, d'où

$$(c) \qquad \lambda = a\sqrt{2(C-1)}.$$

De l'équation (b) on déduit successivement

$$(d)\quad \begin{cases} ds = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\dfrac{d\varphi}{\sqrt{\mathrm{C}-\cos\varphi}}, \\ dy = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathrm{C}-\cos\varphi}}, \\ y = a\sqrt{2}\left(\sqrt{\mathrm{C}-\cos\varphi} + \sqrt{\mathrm{C}-1}\right), \\ dx = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathrm{C}-\cos\varphi}}, \\ x = \dfrac{a}{2}\left(e\displaystyle\int_0^{\varphi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{\mathrm{C}-\cos\varphi}} - \int_0^{\varphi}\sqrt{-\mathrm{C}\cos\varphi}\, d\varphi\right), \end{cases}$$

et x s'exprime au moyen de fonctions elliptiques. Si $2e$ désigne la largeur des lames, on a, pour déterminer C et par suite λ, l'équation

$$e = \frac{a}{2}\left(\mathrm{C}\int_0^{\varphi^*}\frac{d\varphi}{\sqrt{-\mathrm{C}\cos\varphi}} - \int_0^{\varphi^*}\sqrt{\mathrm{C}-\cos\varphi}\, d\varphi\right),$$

que l'on ne pourra résoudre que par tâtonnements.

Mais, lorsque les lames sont très rapprochées l'une de l'autre, on peut éluder l'emploi des fonctions elliptiques en opérant par approximation, comme nous allons le faire voir.

8. *Deux lames parallèles et verticales sont très rapprochées l'une de l'autre.* — L'ordonnée y étant très petite par rapport à e, le profil de la surface est peu différent d'un arc de cercle, dont le centre C est situé sur Oy, et dont nous déterminerons le rayon r par la double condition que l'arc de cercle passe par le point O et les points de raccordement.

Soient

Oy' le prolongement de Oy au delà de O;
Cx' l'horizontale du centre C;
r [illegible] u le rayon vecteur mené de ce centre au point m;
θ l'angle formé par ce rayon avec Cy

Nous supposerons que u et ses dérivées sont assez petits pour que l'on puisse s'en tenir aux termes du premier ordre.

Si λ continue à désigner la hauteur du niveau au-dessus du sommet O, la hauteur au-dessus du point m est, à très peu de chose près,

$$\lambda + \iota - \iota\cos\theta.$$

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \frac{\lambda + \iota - \iota\cos\theta}{a^2}.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$(a) \qquad \frac{\iota(\lambda+\iota)}{a^2} - 1 = \frac{\iota^2\beta}{a^2},$$

nous aurons

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{\iota^2}{a^2}(\beta - \cos\theta) = 0,$$

d'où

$$(b) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left(-\beta + \dfrac{\theta}{2}\sin\theta + A\cos\theta + B\sin\theta\right), \\ \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\dfrac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} - A\right) + B\cos\theta\right], \end{cases}$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Mais pour $\theta = 0$ nous devons avoir $u = 0$ par hypothèse, et de plus $\dfrac{du}{d\theta} = 0$, pour exprimer que la tangente en O est horizontale.

Les formules (b) se réduisent alors aux suivantes :

$$(b') \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\beta(\cos\theta - 1) + \dfrac{\theta}{2}\sin\theta\right], \\ \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\dfrac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} - \beta\right)\right]. \end{cases}$$

L'angle ψ, formé par la tangente en m avec Cy', est donné par la formule

$$(c) \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{du}{d\theta} + \theta.$$

Si θ' est la valeur de θ correspondant au raccordement pour lequel on a $\psi = \pi - \alpha$, nous aurons

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta'},$$

ou, aux termes du second ordre près,

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \varepsilon,$$

ε étant la valeur de $\frac{du}{d\theta}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Désignons par u' la valeur de u pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; comme u est nul au point de raccordement, nous aurons

$$u' + \varepsilon^2 = 0$$

ou

$$\beta(\sin\alpha - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha$$
$$+ \frac{\iota^2}{a^2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha + \cos\alpha\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right]^2 = 0.$$

Une première approximation donne

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

et, en tenant compte des termes du premier ordre et remarquant que

$$\iota = \frac{e}{\sin\theta'} = \frac{e\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

$2e$ étant la distance des lames,

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \frac{e^2}{a^2\cos\alpha}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}\right) + \frac{\cos\alpha}{2}\right]^2.$$

L'équation (a) donne alors

$$(d) \qquad \lambda = \frac{a^2}{e}\cos\alpha + \frac{e}{2}\,\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \sin\alpha},$$

aux termes du second ordre près.

Pour l'eau et le verre on trouve, pour la hauteur du sommet du ménisque au-dessus du niveau,

$$\lambda = \frac{a^2}{e} + \frac{e\Pi}{4} = \frac{7,79}{e} + 0,78e.$$

Pour le mercure et le verre on trouve, pour la hauteur du sommet du ménisque en contre-bas du niveau,

$$\lambda = 0,701\frac{a^2}{e} + 1,21e = \frac{2,29}{e} + 1,21e.$$

9. *De la surface capillaire dans un tube circulaire d'un faible diamètre.* — La forme du ménisque étant très sensiblement sphérique, nous rapporterons sa surface à celle d'une sphère tangente dont la position du centre et la grandeur du rayon peuvent être, dans certaines limites, considérées comme indéterminées, et que nous fixerons en raison des circonstances qui se produiront.

Considérons une section faite par un plan passant par l'axe, et conservons les notations du numéro précédent; nous aurons toujours

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \quad \psi = \theta + 90^\circ - \frac{du}{d\theta}.$$

La surface étant de révolution, R' est la portion de la normale déterminée par l'axe Cy', et nous avons

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin\psi}{\iota(1+u)\cos\theta} = \frac{1}{\iota}\left(-u + \frac{du}{d\theta}\tang\theta + 1\right).$$

La hauteur du point m en contre-bas du niveau étant

$$\lambda + \iota - \iota\cos\theta,$$

nous aurons

$$\frac{2}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\tang\theta + 2u\right) = \frac{\lambda + \iota(1-\cos\theta)}{a^2},$$

d'où

$$(a)\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\lambda r + \iota^2[(1-\cos\theta) - 2a^2)}{a^2} = 0.$$

Posant

$$(b)\qquad \frac{\lambda r + \iota^2 - 2a^2}{a^2} = \frac{\iota^2\beta}{a^2},$$

l'équation (a) devient

$$(c)\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\iota^2}{a^2}(\beta - \cos\theta) = 0.$$

Plus généralement, considérons l'équation

$$(3)\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \mathrm{F}(\theta) = 0,$$

$\mathrm{F}(\theta)$ étant une fonction quelconque de θ, en raison de ce qu'elle se présentera plusieurs fois dans ce qui suit, et proposons-nous d'en trouver l'intégrale générale.

Posant

$$u = \mathrm{U}\sin\theta,$$

l'équation (3) se transforme dans la suivante,

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{d\theta^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}(2\cot\theta - \operatorname{tang}\theta) + \frac{\mathrm{F}(\theta)}{\sin\theta} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}\left[\mathrm{A} - \int \mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta\right],$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{B} + \mathrm{A}\left(-\frac{1}{\sin\theta} + \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right) - \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\int \mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On a enfin, pour l'intégrale cherchée,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \mathrm{B}\sin\theta + \mathrm{A}\left(-1 + \sin\theta \log \frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &\quad - \sin\theta \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta} \int \mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta. \end{aligned}\right.$$

Revenons maintenant à l'équation (c); comme elle est satisfaite par $u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2}$, son intégrale s'obtiendra en ajoutant à cette valeur l'expression (4), en y supposant

$$\mathrm{F}(\theta) = -\frac{\iota^2}{a^2}\cos\theta,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\iota^2\beta}{2a^2} + \mathrm{B}\sin\theta + \mathrm{A}\left(-1 + \sin\theta \log \frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &\quad + \frac{\iota^2}{3a^2}(\theta\sin\theta + \cos\theta). \end{aligned}$$

Il faut que A soit nul, car autrement u deviendrait infini pour $\theta = 90°$; il nous reste donc

$$(d)\qquad u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2} + \mathrm{B}\sin\theta + \frac{\iota^2}{3a^2}(\theta\sin\theta + \cos\theta),$$

d'où

$$(e)\qquad \frac{du}{d\theta} = \mathrm{B}\cos\theta + \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.$$

Or cette dernière valeur doit être nulle pour $\theta = 0$, puisqu'au point correspondant la tangente est horizontale, ce qui exige que B soit nul. Nous avons donc finalement

$$(d')\qquad u = \frac{\iota^2}{a^2}\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\theta\sin\theta + \cos\theta}{3}\right),$$

$$(e')\qquad \frac{du}{d\theta} = \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondant au point de raccordement par lequel il nous est permis de faire passer le cercle de comparaison; nous aurons

$$(f)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\beta}{2}+\frac{\theta'\sin\theta'+\cos\theta'}{3}=0,\\ &\theta'=\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\iota^2}{3a^2}\theta'\cos\theta', \end{aligned}\right.$$

équations qui feront connaître θ' et β. Mais comme, dans la formule (d), β est multiplié par le facteur $\frac{\iota^2}{a^2}$ supposé très petit, nous l'obtiendrons avec une approximation suffisante en supposant $\theta'=\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans la première des formules (f), ce qui donne

$$\beta=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right].$$

En appelant $2e$ le diamètre du tube, on a

$$\iota=\frac{e}{\sin\theta'}=\frac{e}{\cos\alpha},$$

et la formule (b) donne

$$\lambda=\frac{2a^2}{e}\cos\alpha+\frac{e}{\cos\alpha}\left\{\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right]-1\right\}$$

pour la distance du sommet du ménisque au niveau.

10. *Expression du volume d'un liquide compris entre sa surface libre et un plan horizontal déterminé, quelle que soit la forme de la section du tube.* — Nous supposerons que la surface libre (S) présente sa convexité vers le plan, et nous désignerons par A la section du tube et par P le périmètre du contour de la surface (S).

En nous reportant au n° **1**, nous pourrons écrire

$$(a)\qquad \mathrm{K}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)=\Pi y-\mathrm{C},$$

$\frac{C}{\Pi}$ étant la hauteur du plan au-dessus du niveau du liquide extérieur au tube.

Concevons que l'on décompose la surface capillaire en éléments par des lignes de courbure infiniment voisines dans chacune des deux séries, et soient $d\omega$ un de ces éléments et χ l'angle que forme sa normale avec la verticale. Nous aurons pour le volume cherché, en ayant égard à la formule (a),

$$(b) \qquad V = \int y \cos\chi \, d\omega = \frac{K}{\Pi} \int \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \cos\chi \, d\omega + \frac{C}{\Pi} A.$$

Considérons maintenant une surface (S′) parallèle à (S) et qui en soit distante d'une quantité infiniment petite ε. Les normales aux sommets de $d\omega$ détermineront dans (S′) un élément $d\omega'$ dont les côtés seront dans les rapports $\frac{R-\varepsilon}{R}$, $\frac{R'-\varepsilon}{R'}$ avec ceux de $d\omega$.

On a donc

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{(R-\varepsilon)(R'-\varepsilon)}{RR'} = 1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \varepsilon,$$

et la formule (b) peut s'écrire ainsi :

$$V = \frac{K}{\Pi\varepsilon} \int (d\omega - d\omega') \omega\chi + \frac{C}{\Pi} A.$$

Or l'intégrale représente la différence des projections horizontales des aires de (S) et (S′), ou la projection de la zone déterminée dans (S) par les normales menées aux points du contour de (S′), qui est égale à $P\varepsilon \cos\alpha$. On a donc

$$(5) \qquad V = \frac{KP}{\Pi} \cos\alpha + \frac{C}{\Pi} A.$$

Si le tube est circulaire et si le plan sécant est le niveau extérieur du liquide, on a

$$C = 0, \quad P = 2\pi r,$$

et, en posant comme plus haut $\frac{K}{\Pi} = a^2$, on a

$$V = a^2 \times 2\pi e \cos\alpha.$$

En désignant par λ la hauteur moyenne de (S) au-dessus du niveau, on aura

$$V = \Pi e^2 \lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2a^2 \cos\alpha}{e},$$

ce qui est conforme au résultat obtenu au numéro précédent, aux termes en e près.

Dans le cas de deux lames parallèles on a

$$V = a^2 \Pi e \cos\alpha,$$

d'où λ, qui est moitié moindre que dans le cas d'un tube.

11. *Liquides superposés dans un tube circulaire capillaire.* — Considérons un tube plongé dans un liquide (A_1) dont la portion comprise dans ce tube soit surmontée d'un volume déterminé d'un autre liquide (A) de moindre densité.

Nous supposerons que (A) mouille et que (A_1) ne mouille pas la paroi intérieure du tube. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre hypothèse.

Considérons une section faite par un plan passant par l'axe du tube.

Soient

aOa, $a_1O_1a_1$ les profils des ménisques supérieur et inférieur;
OO_1 l'axe du tube;
II l'intersection, avec sa paroi intérieure, du plan de niveau extérieur;
y, y_1 les distances de deux points m, m_1 de aOa, $a_1O_1a_1$ situés sur la même verticale à la droite II;
n l'intersection de mm_1 avec II;
C la pression censée constante exercée sur la section II.

Nous admettrons pour (A) les notations qui précèdent, en les affectant de l'indice 1 pour (A_1).

Concevons un cylindre vertical d'une section infiniment petite dont mm_1 serait l'axe.

L'action du ménisque aOa s'ajoute à la réaction C en n pour faire équilibre au poids de ce cylindre, d'où la relation

$$(a)\qquad K\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\Pi y - C.$$

On a de même

$$(b)\qquad K_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}\right)=\Pi_1 y_1 - C.$$

Le volume compris entre les surfaces aOa et $a_1O_1a_1$ est donné et peut être représenté par

$$(c)\qquad \Pi e^2 H,$$

H étant la portion de la longueur du tube qu'occuperait le liquide dans le tube sans les effets de la capillarité. D'après le numéro précédent, les volumes $IaOaI$, $I_1a_1O_1a_1I_1$ ont respectivement pour expressions

$$\frac{K.2\frac{\pi}{2}e}{\Pi}\cos\alpha+\frac{C\frac{\pi}{2}e^2}{\Pi},$$

$$\frac{K.2\pi e}{\Pi_1}\cos\alpha_1+\frac{C\pi e^2}{\Pi_1};$$

en égalant leur somme à l'expression (c), on trouve

$$(d)\qquad C=\frac{H-\frac{2}{e}\left(\frac{K\cos\alpha}{\Pi}+\frac{K_1\cos\alpha_1}{\Pi_1}\right)}{\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi_1}}.$$

En portant cette valeur dans la formule (b), on obtiendra une équation analogue à celle que nous avons intégrée par approximation au n° **9**.

Si par approximation on prend $R_1=R'_1=e\cos\alpha_1$, la formule (b) donne, pour la valeur moyenne de la distance du ménisque inférieur au niveau,

$$y_1=\frac{2K\cos\alpha_1}{\Pi e}+\frac{H-\frac{2}{e}\left(\frac{\cos K\alpha}{\Pi}+\frac{K_1}{\Pi_1}\cos\alpha_1\right)}{\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi_1}},$$

ou encore

$$y_1 = \frac{2a_1^2 a_1 \alpha_1}{e} + \frac{\Pi - \frac{2}{e}(a^2 \cos\alpha + a_1^2 \cos\alpha_1)}{1 + \frac{\Pi_1}{\Pi}}.$$

La même méthode s'applique au cas où plusieurs liquides se superposeraient dans un tube.

12. *Forme d'une très petite goutte d'un liquide reposant sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas.* — Nous aurons dans ce cas

$$a^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = y + \lambda,$$

λ étant une constante dont la valeur résultera de la solution du problème. Si les dimensions de la goutte sont très petites, il en sera de même de y et en dehors de sa zone de contact avec le plan.

En nous reportant au n° **9**, on voit que la forme de la goutte est donnée par l'équation (c), dans laquelle β remplace l'inconnue λ. On en déduit de la même manière

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\iota^2}{a^2}\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\theta\sin\theta + \cos\theta}{3}\right),\\ \frac{du}{d\theta} &= \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Si V désigne l'angle que forme la tangente avec le rayon vecteur, on a

$$V = 90^\circ - \frac{du}{d\theta}.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondant au raccordement avec le plan; on a

$$V = \theta' - 90^\circ + \alpha,$$

d'où

$$(b)\qquad \theta' = 180^\circ - \alpha - \frac{\iota^2}{3a^2}\theta'\cos\theta',$$

et, en négligeant le carré de $\frac{\iota^2}{a^2}$,

$$\theta' = 180^\circ - \alpha + \frac{\iota^2}{23a^2}(\pi - \alpha)\sin\alpha.$$

Nous supposerons que l'on prenne pour ι le rayon de la sphère équivalente à la goutte, et qui est par conséquent une donnée de la question.

Nous devrons exprimer que l'excès de l'aire de la section méridienne sur celle d'un grand cercle est nulle, ou que l'on a

$$\iota\int_0^{\theta'} u\,d\theta - \frac{\iota(1+u')\sin\theta'\cos\theta'}{2} - \frac{\iota}{2}(\pi - \theta') = 0,$$

u' étant la valeur de u correspondant à $\theta = \theta'$.

On déduit de là

$$\frac{\beta}{2}\frac{\iota^2}{a^2}(-\theta' + \sin\theta'\cos\theta') - \frac{\sin 2\theta'}{4} - \frac{\pi - \theta'}{2}$$
$$+ \frac{\iota^2}{a^2}\left[\frac{2\sin\theta' - \theta'\cos\theta'}{3} - \frac{1}{6}(\theta'\sin\theta' + \cos\theta')\sin\theta'\cos\theta'\right] = 0,$$

équation d'où l'on déduira $\frac{\beta\iota^2}{a^2}$ qui, comme on devait s'y attendre, n'est pas une quantité très petite, puisque c'est devant son équivalent λ que nous avons négligé des termes.

13. *Goutte très large.* — L'équation de la section méridienne de la surface capillaire de révolution peut se mettre sous la forme

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{y + \lambda}{a^2},$$

φ étant l'angle que forme la tangente avec l'axe des x; cette équation ne paraît pas pouvoir s'intégrer, et, dans ce qui suit, nous devrons nous contenter d'approximations.

Nous placerons l'origine au sommet de la courbe, en prenant pour origine l'horizontale de ce point.

Si une étendue assez grande φ reste suffisamment petite pour que l'on puisse négliger le carré de cet angle, ce qui permet de supposer $ds = dx$, $\varphi = \sin\varphi = \operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx}$, l'équation (a) prend alors la forme suivante,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{(y+\lambda)}{a^2} = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$y + \lambda = A_1\int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right)d\omega$$
$$+ A_2\int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right)\log(x\sin^2\omega)\,d\omega,$$

A_1 et A_2 étant deux constantes arbitraires. Mais A_2 est nul, car autrement y serait infini pour $x = 0$, et, comme y est nul pour $x = 0$, il vient

$$(b)\qquad y + \lambda = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right)d\omega \quad (^1),$$

d'où

$$(c)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi a}\int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} - e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right)\cos\omega\,d\omega,$$

et l'on voit que $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $x = 0$, ce qui devait être.

Supposons que la goutte soit assez large pour qu'une valeur de φ_1 de φ, inférieure à 20°, corresponde à une valeur l relativement grande de x, et soit y_1 la valeur correspondante de y. Nous aurons

$$(d)\qquad \begin{cases} y_1 + \lambda = \dfrac{\lambda}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(e^{\frac{l}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{l}{a}\cos\omega}\right)d\omega \\ \operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi a}\displaystyle\int_0^\pi \left(e^{\frac{l}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{l}{a}\cos\omega}\right)\cos\omega\,d\omega. \end{cases}$$

---

(1) Poisson (p. 213) pose une formule tout autre, sans faire connaître de quelle manière il y est arrivé; mais elle est inexacte, car elle ne satisfait pas à l'équation différentielle.

Mais, comme λ est inconnue, la valeur de l ne peut pas être fixée *a priori* et est subordonnée à la solution du problème.

L'équation (a) donne alors, par approximation,

$$(e) \qquad \sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{1}{l}\right) = \frac{y+\lambda}{a^2}.$$

Quoique sous une forme plus simple, elle ne paraît pas pouvoir s'intégrer. Nous sommes ainsi réduit à déterminer des valeurs approchées de φ et de x en fonction de y, en négligeant le carré de $\frac{1}{l}$.

Si nous posons $\varphi = u + \frac{v}{l}$, et si nous identifions après la substitution dans (c) les termes indépendants et dépendants de $\frac{1}{l}$, nous trouvons

$$(f) \qquad \sin u \frac{du}{dy} = \frac{y+\lambda}{a^2},$$

$$(f') \qquad \frac{dv}{dy}\sin u + v\cos u\frac{du}{dy} = 0.$$

Si C′ est une constante arbitraire, la dernière de ces équations donne

$$v = \frac{C'}{\sin u},$$

et l'on a, par suite,

$$(g) \qquad \sin\varphi = \sin u + \frac{C'}{l}\cot u.$$

Mais u déduit de (f) renfermera une constante arbitraire C, et l'on sera libre d'établir entre C et C′ telle relation que l'on jugera convenable, pourvu que $y = y_1$, l'équation (g) donne $\varphi = \varphi_1$. Il nous est donc permis de supposer $C' = 0$, et, en intégrant l'équation (f), on trouve

$$\cos u = \cos\varphi = \cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2 - (y_1+\lambda)^2],$$

d'où

$$(h) \qquad x - l = \int_{y_1}^{y}\cot\varphi\, d\varphi = \int_{y_1}^{y}\frac{\cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2 - (y_1+\lambda)^2]}{\sqrt{1 - \left\{\cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2 - (y_1+\lambda)]^2\right\}^2}}dy,$$

intégrales réductibles en fonctions elliptiques.

Soient h la hauteur de la goutte ou l'ordonnée du point de raccordement correspondant à $\cos\varphi = - \cos\alpha$. Nous aurons

$$(i) \qquad \cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(h+\lambda)^2 - (y_1 + a)^2] = - \cos\alpha,$$

et l'équation (h) fera connaître la valeur x' de x du point de raccordement.

On conçoit que l'on puisse exprimer que le volume de la goutte est donné, ce qui établira entre λ et l une relation qui, jointe à la seconde des formules (2), permettra de déterminer ces constantes. Il faudra s'assurer ultérieurement que l est relativement grand, comme on l'a supposé.

14. *Liquides soustraits à l'action de la pesanteur.* — Dans ce qui suit, nous considérerons avec M. Plateau une masse liquide en suspension dans un autre liquide de même densité avec laquelle elle ne peut se mélanger.

Si la masse considérée est en repos, elle affectera la forme sphérique. Mais si on lui imprime un mouvement de rotation, selon que la vitesse sera au-dessous ou au-dessus d'une certaine limite, elle deviendra un sphéroïde aplati, ou elle se décomposera en sphéroïde et un anneau tournant autour de ce sphéroïde.

Soient n la vitesse de rotation; x la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe, le potentiel de la force centrifuge sera $\frac{n^2x^2}{2}$; si l'on attribue à a la même signification que ci-dessus, et si l'on pose $b^3 = \frac{2a^2y}{n^2}$, l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda),$$

λ étant une constante.

Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda),$$

ou, en multipliant par x,

$$\frac{dx \sin\varphi}{dx} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda).$$

On déduit de là, en appelant C une constante arbitraire,

$$\sin\varphi = \frac{1}{b^3}\left(\frac{x^3}{4} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{C}{x}\right) \tag{2}$$

et

$$y = \int \operatorname{tang}\varphi\, dx = \frac{1}{b^3}\int \frac{\frac{x^3}{4} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{C}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^6}\left(\frac{x^3}{4} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{C}{x}\right)}}\,dx$$

pour l'intégrale de l'équation proposée.

15. *La surface diffère peu d'une sphère.* — C'est ce qui a lieu quand la vitesse angulaire est suffisamment faible, et alors l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}u\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\iota^3}{b^3}(\sin^2\theta + \lambda) = 0,$$

et a pour intégrale

$$u = B\sin\theta - \frac{\lambda\iota^3}{2b^3} + A\left(-1 + \sin\theta \log\frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$- \frac{\iota^3}{4b^3}\sin\theta\log\frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} + \frac{\iota^3}{4b^3}\sin^2\theta.$$

Pour que u ne soit pas infini pour $\theta = 90°$, il faut que les termes $\log\frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}$ disparaissent ou que l'on ait

$$A = \frac{\iota^3}{4b^3},$$

et alors, en comprenant la constante de $-\frac{\iota^3}{4b^3}$ dans l'indéterminée $-\frac{\lambda\iota^3}{2b^3}$, il vient

$$u = B\sin\theta - \frac{\lambda\iota^3}{2b^3} + \frac{\iota^3}{4b^3}\sin^2\theta$$

et

$$\frac{du}{d\theta} = B\cos\theta - \frac{\iota^3}{2b^3}\sin\theta\cos\theta.$$

Pour que la tangente au sommet soit perpendiculaire à l'axe de rotation, il faut que B soit nul ou que l'on ait $B = 0$, et par suite

$$u = -\frac{\lambda\iota^3}{2b^3} + \frac{\iota^3}{4b^3}\sin^2\theta.$$

Si nous prenons pour ι le rayon de la sphère équivalent au sphéroïde, il faut que $\int_0^\pi u^2\,d\theta$ soit nul, ce qui donne

$$\gamma = \frac{1}{4}$$

et

$$u = -\frac{\iota^3}{4b^3}\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta\right),$$

En coordonnées rectangulaires, nous aurons pour l'équation de la surface,

$$x^2 + y^2 = \iota^2(1+u)^2 = \iota^2(1+2u)$$

ou

$$x^2 + y^2 = \iota^2\left(1 - \frac{\iota^3}{4b^3}\right) + \frac{\iota^3}{b^3}\,\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

ou encore, aux termes près du second ordre,

$$x^2 + y^2 = \iota^2\left(1 - \frac{\iota^3}{4b^3}\right) + \frac{\iota}{b^3}x^2,$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde en révolution aplati dont il est facile de trouver les axes.

16. *La surface diffère d'un tore.* — Nous supposerons qu'il est ainsi, sauf vérification ultérieure, lorsque la distance de la masse à l'axe de rotation est très grande par rapport aux dimensions transversales de l'anneau.

Soient c le centre du cercle générateur; l sa distance à l'axe, nous avons

$$x = l + \iota \sin\theta ;$$

en désignant par C une constante

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin\theta}{l + \iota \sin\theta} = \frac{1}{l}\left[\sin\theta - \frac{\iota}{2l}(1 - \cos 2\theta)\right].$$

Par suite,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{1}{l}\right)\sin\theta - \frac{\iota^2}{2l^2}\cos 2\theta - C = 0;$$

d'où

$$u = C + \frac{1}{2}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} + \frac{\iota}{l}\right)\theta\cos\theta - \frac{\iota^2}{8l^2}\cos 2\theta + A\cos\theta + B\sin\theta,$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right)(\cos\theta - \theta\sin\theta) + \frac{\iota^2}{4l^2}\sin 2\theta - A\sin\theta + B\cos\theta.$$

On doit avoir $\frac{du}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 90°$, d'où

$$A = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right).$$

Par suite,

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right)\left(\cos\theta - \theta\sin\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right) + \frac{\iota^2}{8l^2}\cos 2\theta + B\sin\theta + C;$$

B et C restent indéterminés, en raison même de l'origine qui n'a pas été fixée. Si nous la plaçons au milieu du diamètre horizontal, u devra avoir la même valeur pour $\theta = 90°$ et $\theta = -90°$, d'où

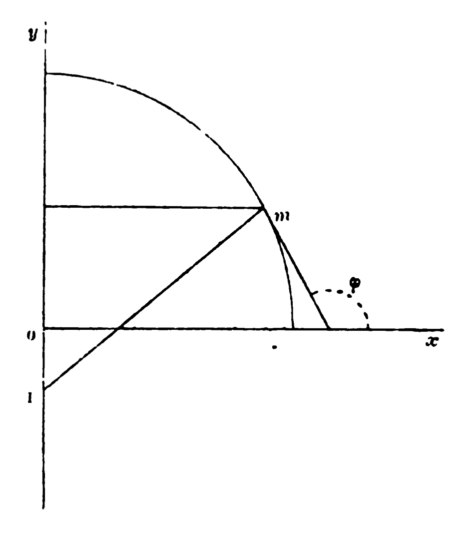
$$C = 0, \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{2b\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right)\Pi + \frac{\iota^2}{8l^2}.$$

§ III. — *Des liquides uniquement soumis à leurs actions mutuelles.*

Si l'on introduit une masse déterminée M d'un liquide A dans un milieu formé d'un autre liquide B de même densité que le précédent, mais avec lequel il ne peut pas se mélanger, A se trouve dans les conditions d'un liquide uniquement soumis à ses actions mutuelles, et c'est ainsi que M. Plateau a obtenu expérimentalement, suivant les conditions qu'il imposait à M, les différentes formes que peut affecter un solide de révolution dont la moyenne courbure est constante. Nous avons ainsi à nous poser un problème résolu déjà depuis longtemps par bien des savants, mais en nous efforçant à en simplifier la solution.

17. *Équation générale des surfaces de révolution dont la moyenne courbure est constante.* — L'équation (1) du n° **2** nous donnera l'équa-

Fig. 6.



tion différentielle de la surface de révolution que peut affecter une masse liquide soustraite à l'action des forces extérieures en y supposant $g = 0$, et, en représentant la constante $\frac{C}{\mu}$ par $2A$, nous aurons

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 2A.$$

Soient (*fig.* 6)

Oy l'axe de révolution;
Ox la perpendiculaire en un point quelconque déterminant avec Ox une section méridienne que nous allons considérer;
φ l'angle que forme avec Ox la tangente en un point m dont les coordonnées sont x et y;
mI la normale en m limitée à Ox;
s l'arc de la courbe mesurée à partir de Oy.

Nous avons

$$dx = -ds\cos\varphi,\quad \frac{1}{R} = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx},\quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{mI} = \frac{\sin\varphi}{x},$$

d'où

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{x} = 2A$$

ou

$$\frac{dx\sin\varphi}{dx} = 2Ax.$$

En intégrant et désignant par B une constante arbitraire, on trouve

$$(1)\qquad \sin\varphi = \frac{Ax^2 + B}{x}.$$

Remarque. — Si la surface est fermée, on a $\varphi = 0$ pour $x = 0$, par suite $B = 0$ et

$$\sin\varphi = Ax.$$

On déduit de là, en désignant par C une constante,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{Ax}{\sqrt{1 - A^2x^2}},$$

$$y + C = -\frac{1}{A}\sqrt{1 - A^2x^2}$$

et enfin

$$(y + C)^2 + x^2 = \frac{1}{A^2},$$

équation d'un cercle. D'où il suit que *la sphère est la seule surface de révolution à courbure moyenne constante qui soit fermée.*

Revenons maintenant à l'équation (1), et désignons par x_1 et x_2 les

valeurs de x qui correspondent à $\varphi = 90^\circ$, $\varphi = -90^\circ$. Nous aurons

$$x_1 = A x_1^2 + B,$$
$$-x_2 = A x_2^2 + B,$$

d'où

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2}, \quad B = -\frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

et, en substituant x_1 et x_2 aux constantes A et B, nous aurons

$$\sin\varphi = \frac{x^2 - x_1 x_2}{(x_1 - x_2)x},$$
$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{x(x_1 - x_2)}\sqrt{(x_1^2 - x^2)(x^2 - x_2^2)},$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{x^2 - x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 - x)(x^3 - x_2^2)}}.$$

Si nous posons

$$x^2 = x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi,$$

ψ étant un angle auxiliaire, ce qui est permis puisque x_1 et x_2 sont les valeurs extrêmes des x, nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi - x_1 x_2}{(x_1^2 - x_2^2)\sin\psi\cos\psi} = \frac{dy}{dx},$$
$$dx = -\frac{(x_1^2 - x_2^2)\sin\psi\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi}},$$

d'où

$$dy = \pm\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin\psi}\,d\psi \mp \frac{x_1 x_2\,d\psi}{\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi}}.$$

Si nous plaçons l'origine des coordonnées de manière que l'on ait $y = 0$ pour $x = 0$, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \pm y = x_1 &\left\{ E\left[\sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2}}\,\varphi\right] - E\left[\sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2}}\,\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\ &- x_2\left[F\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}}\,\varphi\right)\right] - F\left[\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}}\,\frac{\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Nous aurons ainsi deux systèmes de courbes selon que x_2 sera de même signe que x_1 ou sera de signe contraire.

NOTE

SUR LE MOUVEMENT ET LA DÉFORMATION D'UNE BULLE LIQUIDE QUI S'ÉLÈVE DANS UNE MASSE LIQUIDE D'UNE DENSITÉ PLUS GRANDE.

En 1733, Maupertuis a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences,* la solution du problème du mouvement d'une bulle d'air dans un liquide. On a reproché à notre ancien Confrère d'avoir admis que la bulle reste sphérique.

Un géomètre belge, M. Pagani, a publié, en 1834, dans le *Journal de Crelle,* un Mémoire sur le mouvement d'une bulle (B), liquide ou gazeuse, en tenant compte de la résistance au mouvement opposée par le liquide ambiant (A). Il est arrivé à des résultats qui séduisent au premier abord et dans lesquels la cycloïde joue le principal rôle; mais, en y regardant d'un peu près, on reconnaît que, en négligeant la résistance de (A), la bulle serait un cylindre vertical indéfini, ce qui n'est pas précisément conforme à l'observation.

Maupertuis était donc moins éloigné de la vérité que M. Pagani en admettant, *a priori,* comme un fait acquis, qu'une bulle affecte à très peu près la forme sphérique, fait qui n'a reçu que plus tard son explication, en partant de la formule de Laplace relative à l'influence, sur la pression, de la courbure de la surface d'un liquide. Cette formule, néanmoins, n'est pas toujours suffisante pour conduire à une solution rationnelle de certains problèmes qui se rattachent à la théorie de la capillarité; on a alors recours, pour faire disparaître l'indétermination, à des hypothèses plus ou moins plausibles, qui conduisent quelquefois à des résultats plus ou moins conformes à ceux de l'observation. C'est,

notamment, ce qui a lieu dans la question dont nous avons à nous occuper, et qui ne comporte qu'une seule équation à peu près exempte de reproche.

La surface de (B) est évidemment de révolution autour d'une verticale OI rencontrant en I le niveau H'H du liquide ambiant.

Considérons une section méridienne et soient

A'OAx le plan de l'équateur;
z la distance OI du centre O de l'équateur à H'H;
Π, ρ les poids spécifiques de (A) et (B);
B, B' les pôles supérieur et inférieur de la surface de (B);
m, m' deux points appartenant respectivement à A'BA, A'B'A et correspondant à la même abscisse $On = x$;
$mn = y$, $m'n = y'$ les ordonnées de m, m';
R le rayon de courbure en m, et R_1 la normale au même point limitée par OI;
R', R'_1 les longueurs semblables qui se rapportent à m';
μ le coefficient de capillarité;
φ l'angle $\widehat{mTx}$ formé par la tangente en m avec Ox;
V la vitesse censée constante des molécules du filet élémentaire mm ayant pour section $d\omega$.

Nous ferons abstraction de la pression atmosphérique, qui disparaîtrait presque immédiatement des résultats du calcul.

Si la bulle était en repos, les pressions en m et m' seraient respectivement

$$\Pi(z - y) + \mu\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

$$\Pi(z + y') + \mu\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'_1}\right);$$

mais, à l'état de mouvement, la première de ces pressions doit être augmentée de la résistance opposée au mouvement par (A) et que, d'après ce qui a été admis jusqu'à présent, nous représenterons par une expression de la forme

$$\mu\frac{K}{a}V^2\cos^2\varphi,$$

en désignant par K et a deux constantes absolues dont le rapport ne dépend que de la nature de (A) et (B).

L'équation relative au mouvement vertical du filet mm' défini ci-dessus est, abstraction faite du facteur commun $d\omega$,

$$\Pi(z+y')+\mu\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R'_1}\right)-\Pi(z-y) \\ -\mu\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\mu\frac{K}{a}V^2\cos^2\varphi-\rho(y+y')-\frac{\rho}{g}(y+y')\frac{dV}{dt}=0$$

ou

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\Pi-\rho-\frac{\rho}{g}\frac{dV}{dt}\right)(y+y') \\ \quad +\mu\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R'_1}\right)-\mu\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\mu\frac{K}{a}V^2\cos^2\varphi=0. \end{cases}$$

Telle est l'équation que nous avons énoncée; elle sera d'autant plus exacte que : 1° la bulle sera plus petite, relativement à l'hypothèse que nous avons faite sur la constance de la vitesse V dans un filet vertical; 2° cette vitesse sera plus faible, puisque nous avons estimé les pressions extérieures de la même manière que si les particules de (A), qui se trouvent dans le voisinage de (B), n'entraient pas en mouvement.

Si (B) n'éprouvait pas de résistance au mouvement de la part de (A), l'équation (1) serait satisfaite par

$$\Pi-\rho-\frac{\rho}{g}\frac{dV}{dt}=0,\quad \frac{1}{R'}=\frac{1}{R'_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2a},$$

en donnant ainsi une signification à la constante a.

Si donc la bulle était primitivement sphérique, comme
poserons dans ce qui suit, elle ne subirait, dans l'hypothè
aucune déformation en s'élevant dans (A), et, sous ce rapp
pas à critiquer Maupertuis, en ce qui concerne toutefois une
compressible.

La déformation de la bulle n'est donc due qu'à la résistanc
résistance que nous considérerons comme assez petite pou
puisse en négliger le carré.

Posons, en conséquence,

$$r = \mathrm{O}m = a(1 + u), \quad r' = \mathrm{O}m' = a(1 + u'),$$
$$\theta = \widehat{m\mathrm{O}x}, \quad \theta' = \widehat{m'\mathrm{O}x},$$

en désignant par u, u' des quantités qui, de même que $(\theta - \theta')$, sont de l'ordre de la résistance, ou, si l'on veut pour plus de simplicité, de l'ordre de K. On a, au degré d'approximation convenu,

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{d^2 u}{d\theta^2} - u\right), \quad \frac{1}{\mathrm{R}_1} = \frac{1}{a}\left(1 - u + \mathrm{tang}\,\theta \frac{du}{d\theta}\right).$$

On obtiendra des expressions semblables pour $\frac{1}{\mathrm{R}'}$ et $\frac{1}{\mathrm{R}}$, en substituant u' à u, θ' à θ, et même, au degré d'approximation convenu, en faisant $\theta' = \theta$; si donc nous posons

$$(2) \qquad w = u - u',$$

l'équation (1) devient

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\Pi - p - \frac{p}{g}\frac{d\mathrm{V}}{dt}\right) a[(1 + u)\sin\theta + (1 + u')\sin\theta'] \\ \quad + \frac{\mu}{a}\left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} - 2\,\mathrm{tang}\,\theta \frac{dw}{d\theta} + 2w\right) - \frac{\mu}{a}\mathrm{K}\mathrm{V}^2 \sin^2\theta = 0. \end{cases}$$

La résistance éprouvée par la sphère, rapportée au volume, a pour valeur

$$\frac{3}{8}\mu \frac{\mathrm{K}}{a^2}\mathrm{V}^2 \quad (^1).$$

---

(1) Soient, en effet, r la distance de m à OI, $d\omega$ un élément de la zone élémentaire de rayon r; la composante de la résistance sur $d\omega$ suivant OI est

$$\frac{\mu\mathrm{K}}{a}\mathrm{V}^2 \sin^3\theta\, d\omega,$$

d'où, pour la zone entière,

$$\frac{\mu\mathrm{K}}{a}\mathrm{V}^2\, 2\pi r a\, d\theta \sin^3\theta = \frac{\mu\mathrm{K}}{a}\, 2\pi a^2 \sin^3\theta \cos\theta\, d\theta,$$

En continuant à négliger les termes du second ordre, l'équation (3) sera satisfaite en posant

$$\frac{\rho}{g}\frac{dV}{dt} = \Pi - p - \frac{3}{8}\pi\frac{K}{a^2}V^2, \tag{4}$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} - 2\operatorname{tang}\theta\frac{dw}{d\theta} + 2w + KV^2\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \sin^2\theta\right) = 0. \tag{5}$$

En remarquant que $V\,dt = -\,dz$, l'équation (4) devient

$$\frac{\rho}{2g}\frac{dV^2}{dz} - \frac{3}{8}\mu\frac{K}{a^2}V^2 + \Pi - p = 0, \tag{4'}$$

et fera connaître V en fonction de z, en exprimant que, au point de départ de la bulle correspondant à $z = z_0$, on a $V = 0$. La bulle, tout en se déformant, sera donc animée d'un mouvement de translation vertical, qui est le même que si elle restait sphérique.

On a, pour l'intégrale générale de l'équation (5) et en désignant par A et B deux constantes arbitraires ([1]),

$$w = B\sin\theta + A\left(-1 + \sin\theta\log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{1}{4}KV^2\sin\theta\log\cos\theta$$
$$+\frac{KV^2}{4}\sin\theta\left(-\sin\theta + \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right);$$

---

et, pour l'hémisphère supérieur,

$$\frac{\mu K}{a}V^2\,2\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta.d\theta = \frac{\mu K}{a}V^2\frac{\pi a^2}{2}.$$

En rapportant cette valeur au volume de la sphère, on trouve

$$\frac{3}{8}\mu K\frac{V^2}{a^2}.$$

([1]) Si l'on considère en général l'équation

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} - 2\operatorname{tang}\theta\frac{dw}{d\theta} + 2w + F(\theta) = 0,$$

mais

$$\log \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}} = \log \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\cos \theta} = 2 \log \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right) - \log \cos \theta ;$$

par suite,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} w = {} & \mathrm{B} \sin \theta - \mathrm{A} + 2\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{KV}^2}{4}\right) \sin \theta \log \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right) \\ & - \mathrm{A} \sin \theta \log \cos \theta - \frac{\mathrm{KV}^2}{4} \sin^2 \theta . \end{aligned} \right.$$

Pour que w ne devienne pas infini pour $\theta = 90^\circ$, il faut que $\mathrm{A} = 0$; alors on a simplement

$$w = \mathrm{B} \sin \theta + \frac{\mathrm{KV}^2}{2} \left[\sin \theta \log \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right];$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} = \mathrm{B} \cos \theta + \frac{\mathrm{KV}^2}{2} \Bigg[& \cos \theta \log \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ & + \frac{\sin \theta}{2} \frac{\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}} - \sin \theta \cos \theta \Bigg]. \end{aligned}$$

Comme OA et OB sont deux normales, il faut que $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{du'}{d\theta} = 0$,

---

son intégrale est

$$\begin{aligned} w = \mathrm{B} \sin \theta + \mathrm{A} & \left(-1 + \sin \theta \log \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}} \right) \\ & - \sin \theta \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \cos \theta} \int \mathrm{F}(\theta) \sin \theta \cos \theta \, d\theta . \end{aligned}$$

On arrive facilement à ce résultat en posant $w = \mathrm{V} \sin \theta$, ce qui conduit à une équation linéaire du premier ordre dont la fonction est $\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}$.

par suite $\frac{dw}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 0$, $\theta = 90°$, ce qui exige simplement que $B = 0$. Alors on a, en définitive,

$$(7) \qquad w = u - u' = \frac{KV^2}{2} \sin\theta \left[\log\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sin\theta}{2} \right].$$

Il suit de là que, si θ croît de 0 à 90°, w diminue depuis 0 jusqu'à

$$(8) \qquad -\frac{KV^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \log\sqrt{2}\right) = -0,0769 KV^2.$$

En prenant a égal au rayon de la sphère équivalente au volume de la bulle, on a, en appliquant l'un des théorèmes de Guldin,

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+u}{2}\right)^2 d\theta \, \frac{2}{3}(1+u)\cos\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+u'}{2}\right)^2 d\theta' \, \frac{2}{3}(1+u')\cos\theta' \right]$$
$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+3u)\cos\theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+3u')\cos\theta' \, d\theta' \right];$$

d'où

$$(9) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u + u')\cos\theta \, d\theta = 0.$$

Au point où nous sommes arrivé, on voit que le problème est encore indéterminé et que l'on peut donner au profil A'B'A toute forme peu différente de la circonférence de rayon a, pourvu que cette forme soit symétrique par rapport à OI et qu'elle soit normale à AA'; l'équation de la courbe devra renfermer un coefficient indéterminé dont la valeur se déduira de l'équation (9). Mais les considérations suivantes jetteront peut-être une certaine lumière sur cette dernière partie de la question.

Les recherches les plus récentes sur la résistance opposée par un liquide à un corps solide en mouvement sont dues à Poncelet; mais elles ne conduisent pas à la loi de la répartition des pressions élémen-

taires sur la partie postérieure du corps. Il y a tout lieu de croire cependant, d'après l'observation qui donne une idée de la manière dont se comportent les molécules fluides à l'arrière, que la pression est plus forte aux environs de A', A qu'en B'.

Dans l'ignorance où nous sommes, à ce sujet, nous admettrons que la pression extérieure sur la partie A'B'A de la bulle est uniforme, ce qui conduit naturellement, par suite, à considérer cette partie comme un hémisphère dont le rayon croîtra avec V.

En supposant donc u' constant et portant dans la formule (9) la valeur u déduite de l'équation (7), on trouve

$$2u' = \frac{KV^2}{2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)\sin 2\theta \, d\theta\right],$$

d'où

$$u' = 0,0250\,KV^2. \tag{10}$$

Cette quantité étant positive, le profil A'BA sera aplati et, en se reportant à l'expression (7), l'aplatissement en B, par rapport à la sphère de comparaison, sera

$$0,0519\,KV^2. \tag{11}$$

Cet aplatissement est donc à peu près le double du gonflement (10) à l'équateur.

CHALEUR.

CHALEUR.

COMMENTAIRE A LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR DE FOURIER.

L'unique édition (1822) de la *Théorie de la chaleur* de l'illustre Fourier (¹) est épuisée depuis bien des années. Les volumes, en nombre restreint, dont elle se composait, ont été absorbés en grande partie par des pays étrangers, surtout par l'Allemagne, d'où certainement ils ne nous reviendront plus. Cet Ouvrage ne se trouve, à Paris, que dans quelques bibliothèques ouvertes au public, et dans des bibliothèques spéciales destinées exclusivement à des catégories déterminées de personnes.

La plupart des bibliothèques municipales et universitaires de province n'en possèdent pas.

A la suite de ventes de bibliothèques particulières, on en trouve de temps à autre un exemplaire dans le commerce, mais la plupart de nos géomètres ne sont pas en situation d'en faire l'acquisition, en raison du prix élevé auquel il est porté. Aussi le chef-d'œuvre de l'une de nos plus grandes gloires scientifiques n'est-il généralement connu de nos jeunes générations que dans certaines parties, purement analytiques, introduites dans les traités modernes de Calcul intégral (²).

(¹) Jean-Baptiste-Joseph Fourier est né à Auxerre le 29 mars 1768, et mort à Paris, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, le 16 mars 1830.

(²) Voir notamment le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. J.

Aussi ai-je reconnu, depuis longtemps, l'utilité que présenterait la publication d'un extrait des parties essentielles de la théorie de Fourier; je ne songeais pas à entreprendre moi-même ce travail, mais quelques-uns de mes amis m'ont engagé à m'exécuter, et j'aurais eu mauvaise grâce à ne pas me rendre à leurs désirs.

Toutefois, je n'ai pas cru devoir suivre Fourier pas à pas sur les points suivants : 1° au lieu de déduire l'expression du flux de chaleur dans un corps homogène de la considération d'un mur indéfini, je l'ai établie directement en partant de la loi du rayonnement particulaire à travers un élément plan ; 2° j'ai posé les équations en coordonnées cylindriques et sphériques du mouvement de la chaleur dans toutes leurs généralités, au lieu de me restreindre à des cas particuliers; 3° j'ai supprimé les développements métaphysiques auxquels Fourier s'est livré sur la chaleur, et qui ne sont plus conformes aux idées actuelles des physiciens; 4° j'ai également supprimé ses études préliminaires, qui ont précédé le développement en série trigonométrique d'une fonction périodique, et finalement la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'intégrales définies.

Pour éviter toutes recherches au lecteur, j'ai donné en note au bas de la page les différentes intégrales et les formules dont on a besoin, en en donnant des démonstrations ou plus simples ou plus rigoureuses que celles qui se trouvent dans la *Théorie de la Chaleur*, démonstrations empruntées à divers géomètres qui sont arrivés après Fourier.

J'ose espérer que ce Commentaire, une fois compris, facilitera la lecture des Ouvrages suivants, que l'on ne saurait trop recommander : 1° *Théorie mathématique de la chaleur*, par S.-D. Poisson [1] (1835);

Bertrand (2e Vol., 1870); le *Traité de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (1876); le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Sturm (1873); le *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. J.-A. Serret (1880).

[1] En dehors de digressions sur le rayonnement, le refroidissement et sur l'intégration des équations aux différentielles partielles, Poisson ne s'est principalement occupé que du mouvement de la chaleur dans la sphère, indépendamment de toute hypothèse sur la répartition de la température initiale intérieure et sur la loi de la variation de la température du milieu ambiant avec la position des éléments de la surface avec lesquels il est en contact. Il fait ensuite l'application de ses formules au mouvement de la chaleur à l'intérieur et à la surface de la

2° *Cours de Physique mathématique*, par M. Émile Mathieu [1] (1873);
3° *Leçons sur la Théorie mathématique de la chaleur* (1861), par M. G. Lamé [2].

§ I. — *Généralités.*

1. *Du flux de la chaleur.* — Soient

$d\varpi$, $d\varpi'$ les volumes de deux éléments matériels très voisins m, m' d'un corps solide homogène;

V_1, V'_1 leurs températures, la première étant censée inférieure à la seconde;

r la distance des deux éléments;

$F(r)$ une fonction de la distance r, dépendant de la nature du corps, qui décroît très rapidement quand r augmente, et devient insensible ou nulle quand r atteint ou dépasse une certaine limite r_1, très petite et du même ordre de grandeur que les intervalles intermoléculaires.

Une induction théorique tirée des résultats de l'expérience conduit à représenter par

$$F(r)(V'_1 - V_1)\, d\varpi\, d\varpi'\, dt$$

la quantité de chaleur envoyée par m' à m dans le temps dt, l'excès de température $V'_1 - V_1$ étant nécessairement très petit, en raison de la continuité que présentent les phénomènes naturels.

---

terre. Ces deux questions avaient déjà été traitées à peu près de la même manière par Laplace dans le 4e Volume de la *Mécanique céleste*.

(1) M. Émile Mathieu a notamment ajouté deux chapitres importants à la Théorie mathématique de la chaleur, l'un qui se rapporte à l'équilibre de cylindres indéfinis de différentes formes, et l'autre à l'équilibre de température de l'ellipsoïde.

(2) Lamé, abandonnant le chemin battu, a abordé la Théorie du mouvement de la chaleur, non plus dans l'hypothèse d'un solide homogène, mais plus généralement dans celle d'un corps cristallisé. Comme il y a peu de connexité entre cet Ouvrage et celui de Fourier, je ne crois pas devoir en dire plus.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; $d\omega$ un élément superficiel compris dans le corps et appartenant à un plan indéfini (P) parallèle à zOy.

Pour obtenir la quantité de chaleur ε qui traverse $d\omega$ dans le temps dt, il suffit de faire la somme des quantités de chaleur envoyées par les molécules m' du corps situées d'un côté de (P) à celles des molécules m, situées de l'autre côté de ce plan, pour lesquelles les droites m, m', rencontrent $d\omega$ dans l'intérieur de son périmètre.

Soient

x, y, z les coordonnées du centre de gravité G de $d\omega$;
V la température en ce point;
$x+l, y+h, z+k$ les coordonnées de m;
$x+l', y+h', z+k'$ celles de m'.

D'après le principe élémentaire admis plus haut, les longueurs l, h, k, l', h', k' sont très petites, et nous pourrons négliger leurs puissances supérieures à la première, leurs produits deux à deux, etc., ce qui revient à poser

$$V_1 = V + \frac{dV}{dx}l + \frac{dV}{dy}h + \frac{dV}{dz}k,$$
$$V'_1 = V + \frac{dV}{dx}l' + \frac{dV}{dy}h' + \frac{dV}{dz}k'.$$

On a donc, pour la quantité de chaleur cherchée,

$$\varepsilon = dt\left[\frac{dV}{dx}\int (l'-l)\,F(r)\,d\varpi\,d\varpi' + \frac{dV}{dy}\int (h'-h)\,F(r)\,d\varpi\,d\varpi' + \frac{dV}{dz}\int (k'-k)\,F(r)\,d\varpi\,d\varpi'\right].$$

Par suite du groupement symétrique des particules du corps par rapport à la parallèle en G à Ox, particules qui peuvent être considérées comme ayant le même volume, on voit qu'à une valeur de r correspondront deux systèmes de h, h', k, k' identiques, mais affectés de signes contraires; il résulte de là que les deux dernières intégrales de l'expression ci-dessus de ε sont nulles, et que l'on a simplement

$$\varepsilon = dt\frac{dV}{dx}\int F(r)(l'-l)\,d\varpi\,d\varpi'.$$

Déterminons d'abord la portion ε' de ε qui se rapporte aux molé-

cules m' et m, pour lesquelles la distance r reste constante en grandeur et en direction. Nous supposerons, pour fixer les idées, que les molécules m' sont situées au-dessous de $d\omega$ par rapport au plan yOz censé horizontal. Ces molécules déterminent un cylindre oblique parallèle à r, ayant pour base $d\omega$; de sorte que l'on peut prendre

$$d\varpi' = d\omega\, dl';$$

d'ailleurs on a la relation

$$l - l' = r\cos(r, x),$$

et la limite de l' est $-r\cos(r, x)$; il vient donc, en effectuant une intégration par rapport à l' entre o et cette limite,

$$\varepsilon' = -dt\frac{dV}{dx}F(r)r^2\cos^2(r, x)\,d\omega\, d\varpi,$$

et, par suite,

$$\varepsilon = -dt\frac{dV}{dx}d\omega\int F(r)r^2\cos^2(r, x)\,d\varpi.$$

Cette intégrale s'étend à toutes les molécules m situées au-dessus de $d\omega$ et à toutes les valeurs de r comprises entre o et r_1, et par conséquent c'est une constante α qui ne dépend que de la nature du corps. Nous avons ainsi

$$(1) \qquad \varepsilon = -\alpha\frac{dV}{dx}d\omega\, dt.$$

La constante α est essentiellement positive, attendu que $\frac{dV}{dx}$ est négatif et ε positif, puisque le mouvement de la chaleur ne peut avoir lieu que de la partie la plus chaude du corps vers la partie la plus froide; elle a reçu le nom de *coefficient de conductibilité intérieur*.

Si nous considérons la quantité de chaleur envoyée par m' à m comme une force dirigée de la première de ces molécules vers la seconde, et que nous transportions toutes les forces semblables parallèlement à elles-mêmes en G, leur résultante sera ε, et, en raison du groupement symétrique des molécules par rapport à la normale en G à $d\omega$, elle sera dirigée suivant cette normale.

Le *flux de chaleur*, qui, à un instant donné, se rapporte à un élément $d\omega$, est la quantité de chaleur qui traverse cet élément rapportée

[illegible] unité de temps. Dans les conditions ci-dessus,

$$X = -\alpha \frac{dV}{dx}$$

[illegible] par une droite perpendiculaire à $d\omega$ ou à Ox. [illegible] que X est le *flux de chaleur au point* G estimé paral-

[illegible] *générale du flux de chaleur relatif à un point déterminé* [illegible] *homogène à un instant quelconque.* — Soient

[illegible] trois axes rectangulaires partant d'un point m du solide;
[illegible] dy, $mc = dz$ des longueurs infiniment petites portées [illegible]ivement suivant ces axes à partir de m;
[illegible] du triangle élémentaire abc;
[illegible] les angles formés par la normale à cet élément avec mx, my, mz;
[illegible] flux de chaleur qui se rapporte au même élément;
[illegible] les flux de chaleur en m, parallèles aux trois axes.

La quantité de chaleur qui pénètre dans le temps dt dans le tétraèdre [illegible] par les faces $bmc = d\omega \cos\lambda$, $cma = d\omega \cos\mu$, $amb = d\omega \cos\nu$, a pour expression

$$dt\, d\omega (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu).$$

En en retranchant la quantité de chaleur $N\, d\omega\, dt$ qui s'échappe par abc, il reste

$$dt\, d\omega (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu - N).$$

Mais cette dernière quantité de chaleur ne serait employée qu'à élever d'une quantité infiniment petite la température du tétraèdre qui est du troisième ordre; elle est donc nulle, et nous avons ainsi

$$(3) \qquad N = X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité de la droite $\overline{mN}$ qui représente N. L'équation (3) revient à la suivante

$$mN = X \frac{\xi}{mN} + Y \frac{\eta}{mN} + Z \frac{\zeta}{mN},$$

d'où

$$\chi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X\chi + Y\eta + Z\zeta,$$

ou encore

$$\left(\chi - \frac{X}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{Y}{2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{Z}{2}\right)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{4}.$$

On voit ainsi que, si, à un instant déterminé, on fait varier l'orientation de l'élément $d\omega$, 1° *le lieu des points* N *est une sphère passant par le point* m; 2° *il y a une position de l'élément pour laquelle le flux atteint une valeur maximum que nous désignerons sous le nom de* flux principal; 3° *le flux de chaleur estimé suivant une droite quelconque est la projection du flux principal sur cette droite*; 4° *le flux principal est la résultante géométrique de trois flux à angle droit* (¹).

3. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectangulaires.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires auxquels on rapporte un solide homogène dans lequel la chaleur est en mouvement.

Considérons un parallélépipède élémentaire ayant son sommet en m et pour arêtes dx, dy, dz. La quantité de chaleur qui, dans le temps dt, pénètre dans la face $dy\,dz$ qui passe par m a pour expression

$$-\alpha\, dy\, dz\, dt \frac{dV}{dx},$$

et celle qui en sort par la face opposée

$$-\alpha\, dy\, dz\, dt \left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right),$$

d'où, pour la différence,

$$\alpha\, dt\, dx\, dy\, dz \frac{d^2V}{dx^2}.$$

(¹) Le flux principal est normal à la surface isotherme passant par m à l'instant considéré. En effet, on a, par exemple,

$$\cos\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\frac{dV}{dx}}{\sqrt{\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}}},$$

ce qui est bien le cosinus de l'angle formé par Ox par la surface $V = \text{const.}$

En ajoutant cette expression à celles que l'on en déduit en changeant x en y et z, on trouve que la quantité de chaleur qui reste dans l'élément est

$$\alpha\, dt\, dx\, dy\, dz \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right).$$

Mais cette quantité a été employée à élever de $\frac{dV}{dt}dt$ la température du volume $dx\,dy\,dz$, ou à produire l'effet calorifique

$$\beta\, dx\, dy\, dz\, \frac{dV}{dt}\, dt,$$

en désignant par β la chaleur spécifique du corps rapportée au volume. Si l'on égale cette expression à la précédente, et si l'on pose

$$K^2 = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{4}$$

on trouve

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt}. \tag{5}$$

Lorsque la température en chaque point du corps varie avec le temps, on dit que *le mouvement de la chaleur est varié*, et l'équation (1) est celle de ce mouvement.

Quand la température reste constante en chaque point du corps, on dit qu'elle est *stationnaire* ou que *le mouvement de la chaleur est uniforme*. Dans ce cas, on a

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

et l'équation (5) se réduit à

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0. \tag{5'}$$

4. *Conditions relatives à la surface.* — La fonction V, qui représente la température au point (x, y, z), ne doit pas seulement vérifier l'équation aux différences partielles (5) ou (5′), il faut encore qu'elle satisfasse à la condition relative à la surface, dont nous allons maintenant nous occuper.

Comme, dans ce qui suit, nous ne considérerons que des corps placés dans des milieux dont la température est uniforme, nous pourrons, pour plus de simplicité, substituer à la température intérieure du corps son excès sur celle du milieu ambiant, ce qui revient, en définitive, à changer l'échelle thermométrique en prenant pour o la température du milieu.

Soient dr un élément de la normale menée au point m de la surface du corps, mesuré à partir de ce point; $d\omega$ l'élément de la surface en m.

La quantité de chaleur qui s'échappe par $d\omega$ dans le temps dt est (1)

$$-\alpha \frac{dV}{dr}\, d\omega\, dt.$$

En admettant que V soit assez petit pour que la loi de Newton relative au rayonnement soit admissible, la quantité de chaleur rayonnée par $d\omega$ dans le temps dt est la forme $hV\, d\omega\, dt$, h étant une constante qui ne dépend que de l'état de la surface et de la nature du milieu, et qui a reçu le nom de *coefficient de conductibilité extérieure*. Nous avons donc

$$-\alpha \frac{dV}{dr}\, d\omega\, dt = hV\, d\omega\, dt,$$

ou

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \tag{6}$$

en posant

$$\frac{h}{\alpha} = \frac{1}{n}. \tag{7}$$

La condition (6) devra être transformée en raison du système de coordonnées dont on aura fait choix.

Revenons aux coordonnées rectangulaires.

Soient

$$f(x, y, z) = 0 \tag{8}$$

l'équation de la surface, et

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

On a

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{df}{dz}\right),$$

et la condition (6) prend la forme

$$(9) \qquad \frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{df}{dz}\right) + \frac{V}{u} = 0.$$

Ainsi, pour qu'une intégrale de l'équation (5) ou (5') soit admissible, il faut qu'après l'avoir substituée dans l'équation (9) on obtienne un résultat compatible avec l'équation (8).

Il est facile de vérifier que l'équation (9) n'est qu'une conséquence de la formule (3) du n° **2**, en supposant dans cette dernière

$$X = -\alpha\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\alpha\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz}, \quad N = hV.$$

5. *Condition relative à l'état initial dans le cas du mouvement varié de la chaleur.* — A l'instant pris pour origine du temps, la température en chaque point du corps ne dépendra que de sa position ou de ses coordonnées. On pourra donc la représenter par une fonction de la forme

$$F(x, y, z),$$

et qui est censée donnée.

Ainsi, en supposant que l'on ait satisfait à l'équation (5) et aux conditions (8) et (9), il faut encore, pour que la solution obtenue soit admissible, qu'elle satisfasse à cette nouvelle condition

$$(10) \qquad V = F(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0.$$

6. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées cylindriques* — L'équation qu'il s'agit de trouver pourrait se déduire de l'équation (5) par une transformation de coordonnées, mais il est bien plus simple d'y arriver directement.

Soient r la distance à l'axe Oz d'un point quelconque m du solide

dont l'ordonnée est z; ψ la longitude ou l'angle formé par le plan méridien mOz avec le plan zOx.

Un élément de volume peut être considéré comme étant déterminé par trois couples de surfaces orthogonales, savoir : 1° deux cylindres circulaires ayant Oz pour axe et r, $r + dr$ pour rayons; 2° deux plans méridiens qui forment avec le plan zOx les angles ψ et $\psi + d\psi$; 3° deux plans parallèles au plan xOy, et dont les ordonnées sont z et $z + dz$.

La quantité de chaleur qui entre pendant l'instant dt dans l'élément de volume par la face située sur la surface du cylindre de rayon r est

$$- \alpha\, dt\, r\, d\psi\, dz \frac{dV}{dr},$$

et celle qui sort par la face opposée

$$- \alpha\, dt\, d\psi\, dz \left(r \frac{dV}{dr} + \frac{d}{dr} r \frac{dV}{dr} dr \right),$$

d'où, pour la différence,

$$(a) \qquad \alpha\, dt\, dr\, d\psi\, dz \left(r \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} \right).$$

La chaleur qui entre par la face située dans le plan méridien dont la longitude est ψ est

$$- \alpha\, dt\, dr\, dz \frac{dV}{r\, d\psi},$$

et celle qui en sort par la face opposée

$$- \alpha\, dt \frac{dr\, dz}{r} \left(\frac{dV}{d\psi} + \frac{d^2V}{d\psi^2} d\psi \right),$$

d'où, pour la différence,

$$(b) \qquad \alpha\, dt \frac{dr\, dz\, d\psi}{r} \frac{d^2V}{d\psi^2}.$$

Enfin, par les faces correspondant aux ordonnées z, $z + dz$, il entre

et sort respectivement les quantités de chaleur

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr \frac{dV}{dz},$$

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr \left(\frac{dV}{dz} + \frac{d^2V}{dz^2} dz\right),$$

dont la différence est

$$(c) \qquad \alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr\, dz \frac{d^2V}{dz^2}.$$

La quantité de chaleur retenue par l'élément ou la somme des expressions (a), (b), (c) a servi à élever de $\frac{dV}{dt} dt$ sa température ou à produire l'effet calorifique $\beta r\, d\psi\, dz\, dr \frac{dV}{dt} dt$.

En établissant l'égalité et se reportant à la convention (4), on trouve

$$(11) \qquad r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} + r\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{1}{r}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

En supposant dans cette équation $\frac{dV}{dt} = 0$, on obtiendra celle qui se rapporte au mouvement uniforme.

7. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées sphériques.* — Soient

r la distance d'un point m quelconque du corps à l'origine O;
θ sa colatitude ou l'angle mOz;
ψ sa longitude ou l'angle formé par le plan mOz avec le plan zOx.

Nous déterminerons un élément de volume par les intersections de : 1° deux sphères ayant O pour centre, et r, $r + dr$ pour rayons; 2° deux cônes de révolution autour de Oz, dont les demi-ouvertures sont θ, $\theta + d\theta$; 3° deux plans méridiens dont les longitudes sont ψ, $\psi + d\psi$.

Les quantités de chaleur qui entrent et sortent respectivement par les éléments de surfaces sphériques de rayons r et $r + dr$ sont respec-

tivement

$$-\alpha\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, r\, d\theta \frac{dV}{dr} = -\alpha\, dt \sin\theta\, d\psi\, d\theta \left(r\frac{dVr}{dr} - Vr\right),$$

$$-\alpha\, dt \sin\theta\, d\psi\, d\theta \left(r\frac{dVr}{dr} - Vr + r\frac{d^2Vr}{dr^2}dr\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(a) \qquad \alpha\, dt\, d\psi\, d\theta\, dr \sin\theta\, r \frac{d^2Vr}{dr^2}.$$

Les éléments situés sur les surfaces coniques déterminées par les angles θ, $\theta + d\theta$ donnent de même

$$-\alpha\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, dr \frac{dV}{r\, d\theta} = -\alpha\, dt\, d\psi\, dr \sin\theta \frac{dV}{d\theta},$$

$$-\alpha\, dt\, d\psi\, dr \left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta} + \frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\, d\theta\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(b) \qquad \alpha\, dt\, d\psi\, dr\, d\theta \frac{d}{d\theta}\sin\theta \frac{dV}{d\theta}.$$

Enfin les faces situées dans le méridien dont les longitudes sont ψ, $\psi + d\psi$, donnent

$$-\alpha\, dt\, r\, d\theta\, dr \frac{dV}{r \sin\theta\, d\psi} = -\alpha \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta} \frac{dV}{d\psi},$$

$$-\alpha\, dt \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi} + \frac{d^2V}{d\psi^2}d\psi\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(c) \qquad \alpha\, dt \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta}\, d\psi \frac{d^2V}{d\psi^2}.$$

La somme des expressions (a), (b), (c) devant être égale à

$$\beta\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, dr\, r\, d\theta \frac{dV}{dt}\, dt,$$

il vient

$$(12) \qquad \sin\theta\, r \frac{d^2Vr}{dr^2} + \frac{d}{d\theta}\sin\theta \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r^2}{K^2}\frac{dV}{dt}\sin\theta.$$

Si nous posons $\mu = \cos\theta$, cette équation se met sous la forme suivante :

$$(13) \qquad r\frac{d^2 rV}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r^2}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

Telle est l'équation qui a servi de point de départ à Laplace dans ses recherches sur la chaleur centrale du globe, et dont Poisson a fait usage plus tard dans sa Théorie de la chaleur.

Dans le cas où le mouvement de la chaleur est uniforme, on a simplement

$$(13') \qquad r\frac{d^2 rV}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} = 0.$$

§ II. — *Mouvement de la chaleur dans un solide dont les dimensions sont très petites et dans un solide indéfini dans lequel la direction du mouvement de la chaleur est constante.*

8. *Équation du mouvement de la chaleur dans le solide.* — Nous supposerons que le solide est limité par une surface canal, que la section génératrice ω du volume est assez petite pour que, dans son étendue, la température puisse être considérée comme constante, enfin que la section ω et son périmètre σ ont un centre de gravité commun. Nous désignerons sous le nom de *directrice* le lieu des centres de gravité, qui, avec ω, définit la forme du solide.

Les théorèmes de Guldin, généralisés par Sturm, seront implicitement invoqués dans ce qui suit.

Soit x la longueur d'un arc quelconque de la directrice mesurée à partir d'une origine déterminée A_0.

La différence entre les quantités de chaleur reçue et rejetée par les deux sections normales correspondant à x et $x + dx$ est

$$(a) \qquad -\alpha\omega\, dt\frac{dV}{dx} + \alpha\omega\, dt\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) = \alpha\omega\frac{d^2V}{dx^2}dx\, dt,$$

et représente la quantité de chaleur qui reste dans l'élément de volume $\omega\, dx$.

Le milieu ambiant en absorbe la partie

$$(b) \qquad \sigma\, dx\, h V\, dt.$$

L'autre a pour effet d'augmenter de $\frac{dV}{dt}\,dt$ la température du volume $\omega\,dx$, et a, par suite, pour expression

$$(c) \qquad \beta\omega\, dx \frac{dV}{dt}\, dt.$$

Si l'on pose

$$(d) \qquad a^2 = \frac{\alpha\omega}{\sigma h},$$

et si l'on exprime que l'expression (a) est égale à la somme des expressions (b) et (c), on trouve, en se rappelant la signification de K^2,

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{a^2} + \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

On reconnaîtra facilement que cette équation s'applique à un prisme ou cylindre d'une section quelconque, sans restriction relativement aux positions respectives des centres de gravité de la section et de son périmètre.

9. *Mouvement uniforme de la chaleur.* — Supposons que la section correspondant à l'origine A_0 de x soit maintenue à une température constante V_0, sous l'action d'une source de chaleur ayant cette température; qu'une autre section ω_1 en un point A_1 dont la position est définie par $x = x_1$ soit maintenue à une température constante V_1 sous l'action d'une seconde source de chaleur, et ainsi de suite. Au bout d'un temps plus ou moins long, les températures deviendront sensiblement stationnaires, et nous pourrons supposer $\frac{dV}{dt} = 0$. L'équation (1) se réduit alors à la suivante,

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{a^2},$$

qui a pour intégrale

$$(3) \qquad V = Me^{\frac{x}{a}} + Ne^{-\frac{x}{a}},$$

en désignant par M et N deux constantes arbitraires.

L'équation (3) fera connaître la température dans une section située entre A_0 et A_1, correspondant à x, en déterminant les constantes au moyen des conditions

$$V_0 = M + N, \quad V_1 = Me^{\frac{x_1}{a}} + Ne^{-\frac{x_1}{a}}.$$

Entre A_1 et A_2, on peut supposer que x a pour origine le premier de ces points, et nous aurons de même

$$V_1 = M + N, \quad V_2 = Me^{\frac{x_2}{a}} + Ne^{-\frac{x_2}{a}},$$

et ainsi de suite.

Supposons, en particulier, que le solide ne soit soumis qu'à l'action de la source de la chaleur à la température V_0 disposée à l'une de ses extrémités, et que l'autre extrémité rayonne dans le milieu ambiant. Désignons par l la longueur totale de la directrice. Nous aurons d'abord

$$(e) \qquad V_0 = M + N,$$

puis la condition

$$\frac{dV}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour } n = l,$$

d'où l'on tire, en se reportant à l'équation (3),

$$(f) \qquad Me^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) - Ne^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Des équations (e) et (f) on déduit

$$M = -\frac{V_0 e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)},$$

$$M = \frac{V_0 e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)}.$$

On voit que, si la longueur l est très grande, on a sensiblement

$$M = o, \quad N = V_0$$

et

$$V = V_0 e^{-\frac{x}{a}},$$

formule dont les conséquences sont trop connues pour que nous pensions devoir nous y arrêter.

10. *Mouvement varié de la chaleur dans le solide lorsque sa directrice est fermée dans les deux sens ou qu'elle est infinie.* — Nous faisons cette restriction que la directrice est fermée ou infinie pour ne pas avoir égard aux conditions relatives aux extrémités, qui compliqueraient considérablement la solution du problème que nous avons à résoudre.

Supposons que le solide, après avoir été échauffé d'une manière inégale dans ses différentes parties, soit ensuite placé dans un milieu à la température zéro, et proposons-nous de déterminer la loi suivant laquelle décroît la température à mesure que le temps augmente.

En égalant à zéro le second membre de l'équation (1), on a

$$\frac{dV}{dt} + \frac{K^2}{a^2} V = o,$$

d'où, en désignant par U une constante arbitraire,

$$V = U e^{-\frac{K^2}{a^2} t}. \tag{4}$$

Si nous considérons maintenant U comme une fonction de x et de t, et si nous substituons cette expression dans l'équation précitée, nous trouvons

$$K^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{dU}{dt}. \tag{5}$$

Désignons par p un nombre quelconque, par α une constante arbitraire, par T une fonction de t seul, et posons

$$U = T \cos p(x - \alpha).$$

En substituant cette expression dans l'équation (5), on trouve

$$\frac{dT}{dt} = -K^2p^2T,$$

d'où, en appelant A une constante arbitraire,

$$T = Ae^{-K^2p^2t}.$$

L'équation (5) sera ainsi satisfaite par

$$(6) \qquad U = Ae^{-K^2p^2t}\cos p(x-\alpha).$$

Supposons maintenant que, A et α conservant les mêmes valeurs, on fasse croître p de quantités infiniment petites égales à dp; l'équation (5) sera encore satisfaite par

$$Ae^{-K^2p^2t}\cos p(x-\alpha)\,dp.$$

La somme de toutes les expressions semblables entre deux limites quelconques de p vérifiera encore cette équation; mais nous prendrons ici pour limites $-\infty$ et ∞; nous aurons ainsi la solution

$$(7) \qquad U = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K^2p^2t}\cos p(x-\alpha)\,dp,$$

qui est plus générale que la solution (6). Cette expression peut se mettre sous la forme suivante

$$(8) \qquad U = A\frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}}\ (^1).$$

(¹) [illegible] Afin de montrer comment on arrive à cette intégrale, considérons d'abord [illegible] l'intégrale

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2p^2}\,dp,$$

[illegible] k étant une constante. Il est évident que l'on a

$$P = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2p^2}\,dp.$$

Soit k une constante arbitraire, $p = kz$, z étant une variable auxiliaire sub-

Supposons que l'on fasse varier α d'une manière continue, et posons

$$A = f(\alpha)\,d\alpha,$$

en désignant par f une fonction arbitraire. La formule (8) devient

$$U = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}}\,d\alpha.$$

La somme de tous les termes semblables compris entre les limites

---

stituée à p; il vient

$$P = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{-k^2 z^2} k\,dz.$$

Multiplions cette équation par $2e^{-\gamma^2 k^2}$ et intégrons ensuite par rapport a k, entre les limites $k = 0$, $k = \infty$; nous aurons

$$2P\int_0^\infty e^{-\gamma^2 k^2}\,dk = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k^2(\gamma^2+z^2)}\,dz\,dk^2$$

ou

$$2P^2 = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \frac{dz}{\gamma^2+z^2} = \frac{\pi}{2\gamma^2},$$

d'où

$$P = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma},$$

et

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\,dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}.$$

Revenons maintenant à l'équation (7) et posons

$$\gamma^2 = K^2 t, \quad x - \alpha = 2\chi,$$

χ étant une variable auxiliaire substituée à x. Il vient, abstraction faite du facteur A,

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\cos 2p\chi\,dp,$$

d'où

$$\frac{dU}{d\chi} = -\frac{1}{\gamma^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\sin 2p\chi\,d(\gamma p)^2,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\frac{dU}{d\chi} = -\frac{2\chi U}{\gamma^2};$$

$\alpha = -\infty$ et $\alpha = \infty$ sera encore une solution de l'équation (5), d'où

(9) $$U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}} d\alpha.$$

On peut mettre cette expression sous une autre forme, en posant

$$\frac{x-\alpha}{2K\sqrt{t}} = -\beta,$$

β étant une variable que l'on substitue à α. Il vient alors

(10) $$U = 2K \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2K\sqrt{t}\beta) e^{-\beta^2} d\beta.$$

En portant cette valeur dans l'équation (4), après y avoir remplacé β par α, on trouve

(11) $$V = 2K e^{-\frac{K^2}{a^2}t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Soit $F(x)$ la fonction donnée de x qui représente la loi de la répartition de la température initiale, ou la valeur de V pour $t = 0$. On a

$$F(x) = 2K f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2K f(x) \sqrt{\pi},$$

---

on déduit de là, en appelant U_0 la valeur U correspondant à $\chi = 0$,

$$U = U_0 e^{-\frac{\chi^2}{\gamma^2}}.$$

Or

$$U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}.$$

Donc,

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} e^{-\frac{\chi^2}{\gamma^2}}.$$

En substituant à χ et γ leurs valeurs en fonction de χ et de Kt, on retombe sur la formule (8) du texte.

d'où

$$f(x) = \frac{F(x)}{2K\sqrt{\pi}},$$

et l'équation (11) devient

$$(12) \qquad V = \frac{e^{-\frac{K^2}{a^2}t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2K\sqrt{t}\alpha)e^{-\alpha^2}d\alpha \quad (^1).$$

Telle est la solution complète du problème.

Dans le cas où tous les points du solide se seraient trouvés primitivement à la même température V_0, on aurait

$$F(x) = V_0;$$

par suite,

$$V = V_0 e^{-\frac{K^2}{a^2}t}.$$

11. *Mouvement de la chaleur dans un solide indéfini en tous sens, lorsque la direction de ce mouvement est constante.* — Considérons dans le solide des plans parallèles infiniment rapprochés les uns des autres, et supposons que la température initiale soit uniforme dans chaque plan, tout en pouvant varier d'un plan à un autre. Il est évident que, au bout d'un temps quelconque, la température restera encore uniforme dans chaque plan. On est ainsi ramené à considérer une droite indéfinie A_0x normale aux plans, et dont la température initiale serait représentée par $F(x)$; comme il n'y a pas d'échange de chaleur latérale, on devra supposer $h = 0$ ou $a^2 = \infty$, en se reportant à la valeur (a) du nº 8.

En faisant cette supposition dans l'équation (12) du numéro précédent, on a, pour exprimer que la loi du mouvement varie dans le solide,

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2K\sqrt{t}\alpha)e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

---

(1) Cette formule est due à Laplace.

§ III. — *Mouvement varié de la chaleur dans une sphère.*

12. Considérons une sphère homogène, dont le rayon est a, dans laquelle, à une certaine époque prise pour origine du temps, les couches sphériques élémentaires qui la constituent avaient chacune une température constante, mais pouvant varier de l'une à l'autre couche, le solide ayant été placé dans un milieu à 0°. Au bout d'un temps quelconque, la température sera encore constante dans toute l'étendue d'une couche.

En nous reportant à l'équation (12) du n° **7** et supposant nulles les dérivées partielles relatives à μ et ψ, on a

$$\frac{d^2 rV}{dr^2} = \frac{r}{K^2}\frac{dV}{dt}. \tag{1}$$

En posant

$$rV = U, \tag{2}$$

cette dernière équation se réduit à la suivante,

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dU}{dt}. \tag{3}$$

La condition relative à la surface est (n° 4)

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a. \tag{4}$$

En remarquant que V, par suite, U doit décroître indéfiniment quand t augmente, on est conduit à poser

$$U = ue^{-m^2\frac{K^2}{a^2}t},$$

en désignant par m un nombre quelconque et par u une fonction de r. Si l'on substitue cette expression dans l'équation (3), on trouve

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{m^2}{a^2}u,$$

de la couche élémentaire de rayon r ou la valeur de V pour $t = 0$; nous aurons, pour déterminer les coefficients A_i, l'équation

(8) $$F(r) = \frac{1}{r}\sum A_i \sin m_i \frac{r}{a}.$$

Si nous posons
$$\varphi(r) = rF(r),$$
cette équation revient à la suivante

(9) $$\varphi(r) = \sum A_i \sin m_i \frac{r}{a}.$$

Soit m_j un terme quelconque de la série des m_i; multipliant l'équation (9) par $\sin m_j \frac{r}{a} dr$, et intégrant entre les limites $r = 0$, $r = a$, on trouve

$$\int_0^a \varphi(r) \sin m_j \frac{r}{a} dr = \sum A_i \int_0^a \sin m_i \frac{r}{a} \sin m_j \frac{r}{a} dr$$
$$= a\sum \frac{A_i}{(m_i^2 - m_j^2)}(m_j \sin m_i \cos m_j - m_i \sin m_j \cos m_j).$$

Or, de l'équation (6) on déduit
$$\frac{\tang m_i}{m_i} = \frac{\tang m_j}{m_j},$$
d'où
$$m_j \sin m_i \cos m_j - m_i \sin m_j \cos m_i = 0.$$

Il suit de là que, si j diffère de i, le coefficient de A_i sera nul, et que le seul coefficient qui peut avoir une valeur déterminée doit correspondre à $j = i$; dans ce cas on a

$$\int_0^a \varphi(r) \sin m_i \frac{r}{a} dr = A_i \int_0^a \sin^2 m_i \frac{r}{a} dr = \frac{aA_i}{2}\left(1 - \frac{1}{2m_i}\sin 2m_i\right),$$

d'où, en remplaçant $\varphi(r)$ par $rF(r)$,

(10) $$A_i = \frac{2}{a}\int_0^a \cdot \frac{rF(r)\sin m_i \frac{r}{a} dr}{1 - \frac{1}{2m_i}\sin 2m_i}.$$

L'équation (7) donne ainsi, pour la solution complète du problème,

$$(11)\qquad V = \frac{2}{a}\sum \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{r} \frac{\int_0^a r\,F(r)\sin m_i \frac{r}{a}\,dr}{1 - \frac{1}{2m_i}\sin 2m_i} e^{-m_i^2 \frac{K^2}{a^2} t}.$$

Au bout d'un temps suffisamment grand, cette série se réduira sensiblement à son premier terme, qui correspond à la plus petite m_1 des valeurs des m_i.

13. *Hypothèse d'une température initiale uniforme dans l'intérieur de la sphère.* — Supposons que la sphère, avant d'être exposée au refroidissement, ait été placée assez longtemps dans un milieu dont la température V_0 est constante pour que tous ses éléments aient pris très sensiblement cette température; nous aurons

$$F(r) = V_0,$$

et l'équation (11) donne, en effectuant l'intégration,

$$V = 2V_0 \sum \frac{1 - m_i \cot m_i}{m_i \operatorname{cos\acute{e}c} m_i - \cos m_i} \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{m_i \frac{r}{a}} e^{-m_i^2 \frac{K^2}{a^2} t}.$$

Si l'on remarque que l'équation (6) donne

$$m_i \cot m_i = 1 - \frac{a}{n},$$

l'expression précédente se met sous cette forme plus simple,

$$(12)\qquad V = 2\frac{a}{n} V_0 \sum \frac{e^{-m_i^2 \frac{k^2}{a^2} t^2}}{m_i \operatorname{cos\acute{e}c} m_i - \cos m_i} \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{m_i \frac{r}{a}}.$$

Nous allons maintenant étudier deux cas extrêmes, en désignant dorénavant par V_i la partie de V qui correspond à m_i.

1° *Le rayon de la sphère est très petit.* — Supposons que le rapport $\frac{a}{n}$ soit assez petit pour que l'on puisse négliger ses puissances supérieures à la première. L'équation (6) devient

$$(6') \qquad \operatorname{tang} m = m\left(1 + \frac{a}{n}\right),$$

et l'on voit que sa première racine m_1 est de l'ordre de $\frac{a}{n}$. Si donc on remarque que l'on a, aux termes du cinquième ordre près,

$$\operatorname{tang} m_i = m_1\left(1 + \frac{m_1^2}{3}\right),$$

l'équation (6′) donne

$$m_1^2 = \frac{3a}{n}.$$

Nous avons donc aussi, pour le dénominateur du terme de la série (12) qui correspond à V_1,

$$\frac{m_1}{\sin m_1} - \cos m_1 = \frac{2}{3} m_1^2 = \frac{2a}{n};$$

de plus,

$$\frac{\sin m_1 \frac{r}{a}}{m_1 \frac{r}{a}} = 1 - \frac{1}{6}\frac{m_1^2 r^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{an}.$$

On a donc

$$(13) \qquad V_1 = V_0\left(1 - \frac{r^2}{2an}\right) e^{-\frac{3K^2}{an}t}.$$

Les racines m_i à partir de m_1 deviennent de plus en plus grandes, et l'équation (6′) donne notamment, en négligeant $\frac{a}{n}$ devant l'unité,

$$m_2 = 4,59483.$$

Les rapports $\frac{V_2}{V_1}, \frac{V_3}{V_1}, \cdots$ diminuent donc très rapidement quand t

croît, et deviendront négligeables au bout d'un certain temps; la valeur (13) de V_1 pourra alors être considérée comme représentant la température V.

2° *Le rayon de la sphère est très grand.* — Supposons que le rayon a soit assez grand pour que l'unité soit négligeable devant le rapport $\frac{a}{n}$. L'équation (6) se réduit alors à la suivante

$$(6'') \qquad \operatorname{tang} m = -m \frac{n}{a}.$$

Si l'on néglige les puissances de $\frac{a}{n}$ des ordres supérieurs au premier, cette équation donne,

$$m_i = i\left(1 - \frac{n}{a}\right)\pi.$$

En partant de là, on formera facilement les expressions de V_1, V_2, ...; mais, comme les rapports $\frac{V_1}{V_2}$, $\frac{V_1}{V_3}$, ... décroissent rapidement quand t augmente, V se réduira bientôt à son premier terme, ou sensiblement du moins, c'est-à-dire à

$$V = 2V_0 e^{-\pi^2 \frac{k^2}{a^2} t} \frac{\sin \frac{\pi r}{a}}{\pi \frac{r}{a}}.$$

§ IV. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cylindre circulaire indéfini.*

14. Nous supposerons que la température initiale est constante dans chacune des couches cylindriques élémentaires qui constituent le solide, quoique cette température puisse varier d'une couche à une autre. Dans ces conditions il est clair que, à un instant quelconque, la température sera également uniforme dans chacune des couches. Nous désignerons par a le rayon du cylindre.

En supposant que V soit indépendant de z et de ψ, l'équation (11) du n° 6 devient

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

et l'on a, pour la condition relative à la surface,

$$(2) \qquad \frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a.$$

Posons

$$(3) \qquad V = Ue^{-mt},$$

U étant une fonction de r seulement, et m un nombre quelconque, essentiellement positif attendu que la température diminue quand le temps augmente. En substituant cette expression dans l'équation (1), on obtient, pour déterminer U, l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \frac{4\theta U}{a^2} = 0,$$

en posant

$$\frac{m}{K^2} = \frac{4\theta}{a^2},$$

ce qui donne à la valeur (3) la forme

$$(3') \qquad V = Ue^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta t}.$$

L'équation (4) est satisfaite par la série (¹)

$$(5) \qquad U = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\left(\frac{r^2}{a^2}\theta\right)^i.$$

(¹) Posons, en effet, $r = \dfrac{za}{2\sqrt{\theta}}$, l'équation (4) devient

$$(a) \qquad \frac{d^2U}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dU}{dz} + U = 0.$$

Soit

$$U = \Sigma A_j z^j$$

La valeur (5), multipliée par une constante arbitraire, ne représente que l'une des deux intégrales particulières dont la somme doit donner la solution complète de l'équation (4). Mais la première de ces deux intégrales est la seule que nous ayons à considérer dans la question que nous avons à résoudre, parce que la seconde, devenant infinie pour $r = 0$, est inadmissible ([1]).

15. Les valeurs que l'on doit attribuer à θ ne sont pas arbitraires, car

---

une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z à partir de $j = 0$. En substituant cette série dans (a) et égalant à zéro le coefficient de z^{j-2}, on trouve

$$A_j = -\frac{A_{j-2}}{j^2}.$$

Il faut donc que la série commence par A_0, que les nombres j soient pairs. Soient $j = 2i$. On a

$$A_{2i} = -\frac{A_{2i-2}}{2^2 i^2},$$

et de même

$$A_{2i-1} = -\frac{A_{2i-4}}{2^2 (i-1)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_1 = -\frac{A_0}{2^2},$$

d'où

$$A_{2i} = \frac{(-1)^i A_0}{1.2^2.3^3\ldots i^2}\,\frac{1}{2^{2i}},$$

et enfin

$$U = A_0\left[1 + \sum_1^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2.3^3\ldots i^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2i}\right].$$

En prenant $A_0 = 1$, et remplaçant z par $2\frac{r}{a}\sqrt{\theta}$, on obtient la formule (5) du texte.

([1]) Pour déterminer cette seconde intégrale, posons

$$(b) \qquad U = uU_1,$$

U_1 représentant la solution (5) et u une fonction de r.

En substituant l'expression (b) dans l'équation (4), on trouve

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{2}{U_1}\frac{dU_1}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr} = 0,$$

elles doivent être choisies de manière que $Ue^{-\frac{4k^2\theta}{a^2}t}$, ou simplement U, satisfasse à la condition (2). En remplaçant, dans cette condition, V par l'expression (5), on trouve

$$(6)\qquad \frac{2\theta}{a}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i\, i\theta^{i-1}}{1.2^2\ldots i^2}+\frac{1}{n}\left[1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2\ldots i^2}\theta^i\right]=0.$$

Si nous posons

$$(7)\qquad 1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i=f(\theta),$$

cette équation prend la forme suivante

$$(8)\qquad \frac{a}{2n}f(\theta)+\theta f'(\theta)=0.$$

De l'équation (7), ou de

$$f(\theta)=1-\theta+\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i,$$

---

d'où successivement, en désignant par B et A deux constantes arbitraires,

$$\frac{du}{dr}=\frac{B}{U_1^2 r},$$

$$u=A+B\int\frac{dr}{U_1^2 r},$$

d'où, pour l'intégrale générale de l'équation précitée,

$$U=AU_1+BU_1\int\frac{dr}{U_1^2 r}.$$

Tous les éléments de l'intégrale du second membre de cette équation sont positifs, et comme le premier, correspondant à $r=0$, est infini, il s'ensuit que cette intégrale elle-même est infinie, de sorte que, dans le problème que nous avons à résoudre, il faut supposer $B=0$.

Comme nous le ferons voir en temps voulu.

on tire

$$f'(\theta) = -1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{2^2.3^2\ldots i^2} \theta^{i-1},$$

$$f''(\theta) = \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^i i(i-1)}{2^2.3^2\ldots i^2} \theta^{i-2}$$

et

$$f'(\theta) + \theta f''(\theta) = -1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots(i-1)^2} \theta^{i-1},$$

ou, en remplaçant $i-1$ par i,

$$f'(\theta) + \theta f''(\theta) = -1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2} \theta^i,$$

et enfin

(9) $$\theta \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta} + f = 0.$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction f. On en déduit successivement

$$\theta \frac{d^3 f}{d\theta^3} + \frac{2 d^2 f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta} = 0,$$

$$\theta \frac{d^4 f}{d\theta^4} + \frac{3 d^3 f}{d\theta^3} + \frac{d^2 f}{d\theta^2} = 0,$$

. . . .

et, en général,

$$\theta \frac{d^{\nu+2} f}{d\theta^{\nu+2}} + (\nu+1) \frac{d^{\nu+1} f}{d\theta^{\nu+1}} + \frac{d^\nu f}{d\theta^\nu} = 0.$$

Il suit de là que, si une valeur de θ annule une dérivée quelconque de $f(\theta)$, les dérivées adjacentes prennent des signes contraires pour cette valeur, d'où résulte que les racines en nombre infini de l'équation

$$f(\theta) = 0$$

sont toutes réelles. Elles sont de plus positives, car, d'après la forme même de la fonction $f(\theta)$ définie par la formule (7), tous les termes qui

composent $f(-\theta)$ sont de même signe, et par conséquent cette dernière fonction ne peut pas s'annuler pour une valeur positive de θ (¹).

On conclut de là que l'équation (8) a toutes ses racines réelles et positives.

Soient maintenant

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ les racines de l'équation (8) censées rangées par ordre de grandeur à partir de la plus petite;

U_ν, V_ν les valeurs de U, V correspondant à $\theta = \theta_\nu$, la première étant donnée par l'équation (6');

A_ν une constante arbitraire.

(¹) On fait ici l'application d'un théorème que Fourier considère comme ayant été démontré depuis longtemps, mais il ne l'a pas mentionné dans son *Analyse des équations algébriques*, publiée après sa mort, en 1830, par les soins de Navier, et je n'en ai trouvé de trace nulle part. Il est facile, d'ailleurs, de combler cette lacune ainsi qu'il suit.

Soient X une fonction entière du degré m, $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ses dérivées successives. Supposons que la fonction X jouisse de cette propriété que si une valeur réelle de x annule l'une quelconque X_i de ses dérivées, cette valeur rende X_{i-1} et X_{i+1} de signes contraires; l'équation $X = 0$ a toutes ses racines réelles.

La méthode adoptée par Sturm dans la démonstration de son théorème s'applique évidemment ici, en substituant, à la suite de ses fonctions, la suivante

$$X, X_1, X_i, \ldots, X_m.$$

Or, la suite des premiers termes de ces dernières fonctions ne présentant que des permanences, il s'ensuit que toutes les racines de $X = 0$ sont réelles. Le théorème a lieu quel que soit m, et par conséquent quand m est infini.

Il est évident, d'après ce qui précède, que $X_i = 0$ a toutes ses racines réelles.

On sait que, entre deux racines réelles consécutives de $X = 0$, il y en a au moins une de $X_1 = 0$, et il est évident que dans le cas considéré il ne peut y en avoir qu'une seule. Si donc toutes les racines de $X = 0$ sont de même signe, celles de $X_1 = 0$ porteront ce signe.

En désignant par A une constante, considérons l'équation

$$(a) \qquad AX + xX_1 = 0.$$

Soient x', x'' deux racines consécutives de $X_1 = 0$. Pour $x = x'$ et $x = x''$, X changera de signe, et il en sera par suite de même du premier membre de l'équation (a). D'où il suit que cette équation aura une racine, mais unique, comprise entre x' et x'', et que, par suite, toutes ses racines sont réelles. On voit aussi que si les racines de $X = 0$ sont toutes positives ou négatives, il en sera de même de celles de l'équation (a).

Nous avons, comme solution particulière du problème au point où il est arrivé,

(10) $$V_\nu = A_\nu U_\nu e^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta_\nu t},$$

et, comme solution plus générale,

(11) $$V = \sum_1^\infty A_\nu U_\nu e^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta_\nu t}.$$

16. Si $F(r)$ représente la température initiale de la couche élémentaire de rayon r ou la valeur de V pour $t = 0$, on aura, pour déterminer les A_ν, l'équation

(12) $$F(r) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu U_\nu.$$

En désignant par σ une fonction de r, on déduit de là

(13) $$\int_0^a F(r)\sigma\, dr = \sum_1^\infty A_\nu \int_0^a U_\nu \sigma\, dr.$$

Supposons que la fonction σ soit choisie de telle manière que toutes les intégrales du second membre de l'équation (13) soient nulles, à l'exception de celle qui se rapporte à U_ν, il nous restera une égalité qui nous permettra de déterminer A_ν. Le tout se réduit donc à trouver la forme de la fonction σ.

De l'équation (4), mise sous la forme

(4') $$-\frac{4\theta_\nu}{a^2} U_\nu = \frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_\nu}{dr},$$

on déduit

$$-4\frac{\theta_\nu}{a_2}\int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \int_0^a \sigma \frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \int_0^a \frac{\sigma}{r}\frac{dU_\nu}{dr} dr.$$

Mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int \sigma \frac{d^2 U}{dr^2} dr = \sigma \frac{dU}{dr} - \int \frac{d\sigma}{dr} dU = \sigma \frac{dU}{dr} - U \frac{d\sigma}{dr} + \int U \frac{d^2\sigma}{dr^2} dr,$$

$$\int \frac{\sigma}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{\sigma}{r} U - \int U \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) dr;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$-4\frac{\theta_\nu}{a^2}\int_0^a U_\nu\sigma\,dr = \int_0^a U_\nu\left[\frac{d^2\sigma}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right]dr - \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} - U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a,$$

d'où

$$-\int_0^a U_\nu\left[\frac{d^2\sigma}{r^2d} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) + \frac{4\theta_\nu\sigma}{a^2}\right]dr = \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a.$$

Si σ satisfait à l'équation

$$(14)\qquad \frac{d^2\sigma}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) - \frac{4\theta_\mu\sigma}{a^2} = 0,$$

la précédente se réduit à

$$(15)\qquad \frac{4}{a^2}(\theta_\mu - \theta_\nu)\int_0^a U_\nu\sigma\,dr = \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a.$$

Or, en posant

$$\sigma = sr,$$

l'équation (14) se réduit à la suivante

$$\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds}{dr} + \frac{4\theta_\mu s}{a^2} = 0.$$

On voit donc, en se reportant à l'équation (4'), que l'on peut prendre

$$s = U_\mu$$

et, par suite,

$$(16)\qquad \sigma = rU_\mu.$$

Si l'on remarque, d'après la valeur (5), que $\frac{dU}{dr}$ est nul avec r, l'équation (15) se réduit à la suivante

$$(17)\qquad \int_0^a U_\nu\sigma\,dr = \frac{a^2}{4}\,\frac{1}{\theta_\mu - \theta_\nu}\left(U_\mu\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{dU_\mu}{dr}\right)^a.$$

Mais, d'après l'équation (2), on a, pour $r = a$,

$$\frac{1}{U_\nu}\frac{dU_\nu}{dr} = \frac{1}{U_\mu}\frac{dU_\mu}{dr},$$

d'où il suit que cette intégrale est nulle lorsque μ est différent de ν; mais, lorsqu'il y a égalité, la valeur de l'intégrale est celle de la dérivée du second membre de l'équation (17) par rapport à θ_μ, dans laquelle on a fait ensuite $r = a$, $\theta_\mu = \theta_\nu$. Si l'on remarque, d'après l'équation (5), que U est de la forme

(18) $$U = \varphi\left(\frac{r^2}{a^2}\theta\right),$$

on reconnait sans peine que la valeur cherchée est

(19) $$\int_0^a U_\nu \sigma\, dr - \frac{a^2}{2}(\varphi'^2\theta - \varphi\varphi' - \varphi\varphi''\theta_\nu),$$

en représentant $\varphi(\theta_\nu)$ simplement par φ; mais les équations (2) et (4) donnent, en remplaçant U par l'expression (18),

$$\varphi' = -\frac{a}{2n\theta_\nu}\varphi,$$

$$\theta_\nu\varphi'' + \varphi' + \varphi = 0.$$

En éliminant dans la formule (19) φ' et φ'' au moyen de ces équations, on trouve

(20) $$\int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4n^2\theta_\nu} + 1\right)\varphi^2.$$

En nous reportant à l'équation (14), on voit que l'on a

$$A_\nu = \frac{2}{a}\,\frac{\displaystyle\int_0^a F(r)\, r U_\nu dr}{\left(1 + \frac{a^2}{4n^2\theta_\nu}\right) U_{\nu a}^2},$$

en représentant par $U_{\nu a}$ la valeur de U_ν pour $x = a$, c'est-à-dire $\varphi(\theta_\nu)$ Le problème se trouve ainsi résolu.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Nous supposerons que la base du prisme est maintenue à une température constante que, pour plus de simplicité, nous prendrons égale à l'unité, et que la température intérieure est devenue stationnaire.

Nous aurons à considérer l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0, \quad (1)$$

avec les conditions

$$\frac{dV}{dx}+\frac{V}{k}=0 \quad \text{pour} \quad x=\pm a, \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dy}+\frac{V}{k}=0 \quad \text{pour} \quad y=\pm b. \quad (3)$$

A cause de la symétrie, la fonction V doit conserver la même valeur quand on change les signes de x et y, et, de plus, elle doit devenir nulle pour $z=\infty$.

En désignant par p, q, r des nombres positifs quelconques, et par A une constante arbitraire, on satisfera à ces conditions en posant

$$V=Ae^{-rz}\cos px\cos qy.$$

En substituant cette expression dans l'équation (1), on trouve

de x et y entre $-a$ et a, ou

$$1 = (A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + A_3 \cos m_3 x + \ldots)$$
$$\times (A_1 \cos m_1 y + A_2 \cos m_2 y + \ldots).$$

Il est évident que cette condition sera satisfaite si l'on détermine les coefficients A_i de manière que l'on ait, quel que soit x entre o et a,

$$(6) \qquad A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \ldots = 1.$$

Multiplions cette équation par $\cos m_j x dx$, et intégrons entre les limites o et a. Le coefficient de A_i, ou

$$\int_0^a \cos m_i x \cos m_j x \, dx = \frac{m_i \sin m_i a \cos m_j a - m_j \cos m_i a \sin m_j a}{m_i^2 - m_j^2},$$

sera nul si j est différent de i; c'est ce qui résulte de l'une ou l'autre des équations (4) qui donnent

$$m_i \operatorname{tang} m_i a = m_j \operatorname{tang} m_j a,$$

d'où

$$m_i \sin m_i a \cos m_j a - m_j \cos m_i a \sin m_j a = 0.$$

Si nous supposons $j = i$, il ne restera dans l'équation (6), multipliée par $\cos m_i x$ et intégrée entre $x = 0$ et $x = a$, que le terme en A_i, dont le coefficient sera

$$\int_0^a \cos^2 m_i x \, dx = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\sin 2 m_i a}{2 m_i}\right),$$

et l'on obtiendra de cette manière

$$(7) \qquad A_i = \frac{4 \sin m_i a}{2 a m_i + \sin 2 m_i a}.$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que la formule (6)

conduit, d'après notre analyse, à la relation suivante

$$\frac{1}{4} = \Sigma \frac{\sin m_i a \cos m_i x}{2am_i a + \sin 2m_i a} = 0,$$

qui a lieu pour toutes valeurs de x comprises entre o et a, et par suite entre o et $-a$.

18. Nous allons maintenant étudier deux cas particuliers.

1° *L'épaisseur du prisme est très petite.* — En posant $u = pa$ ou qa, les équations (4) se réduisent à la suivante

$$(8) \qquad u \operatorname{tang} u = \frac{a}{n}.$$

Si la fraction $\frac{a}{n}$ est très petite, cette équation aura une racine u_1 également très petite, dont la valeur approximative est

$$u_1 = \sqrt{\frac{a}{n}}.$$

Les autres racines s'obtiendront par approximation en supposant $a = 0$ dans l'équation (8), et seront

$$u_2 = \pi, \quad u_3 = 2\pi, \quad u_4 = 3\pi, \quad \ldots,$$

de sorte que nous aurons

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{an}}, \quad m_2 = \frac{\pi}{a}, \quad m_3 = \frac{2\pi}{a}, \quad m_4 = \frac{3\pi}{a}, \quad \ldots.$$

Il résulte de là que m_1 est beaucoup plus grand que m_2, m_3, ..., de sorte que l'on peut se borner à considérer le premier terme de la série (6), c'est-à-dire celui qui dépend de $e^{-z\sqrt{2m_1^2}}$.

Son coefficient

$$A_1 = \frac{4 \sin u_1}{2u_1 + \sin 2u_1},$$

en raison de la petitesse de u_1, est sensiblement égal à l'unité, de sorte que l'on a sensiblement

$$V = e^{-z\sqrt{\frac{2}{an}}} \cos\sqrt{\frac{a}{n}}\,x \cos\sqrt{\frac{a}{n}}\,y.$$

2° *L'épaisseur du prisme est très grande.* — Si le rapport $\frac{a}{n}$ est très grand, l'équation (8) donne, à très peu près,

$$u_1 = \frac{\pi}{2}, \quad u_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad u_3 = \frac{5\pi}{2}, \dots$$

d'où

$$m_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad m_2 = \frac{3\pi}{2a}, \quad m_3 = \frac{5\pi}{2a}, \quad \dots .$$

La valeur de V, qui résulte de ces données, offre trop peu d'intérêt pour que nous croyions devoir l'écrire.

§ VI. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cube.*

19. Considérons un cube dont la température intérieure est uniforme et que l'on introduit ensuite dans un milieu dont la température est zéro. Proposons-nous de déterminer la loi de la décroissance de la température aux différents points du solide en fonction du temps écoulé.

Soient

$2a$ le côté du cube;
O son centre;
Ox, Oy, Oz les parallèles menées par ce point aux trois couples d'arêtes du cube.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que la température initiale est égale à l'unité.

La loi cherchée se déduira de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

en y joignant les conditions

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\pm \frac{dV}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a, \\ &\pm \frac{dV}{dy} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{»} \quad y = \pm a, \\ &\pm \frac{dV}{dz} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{»} \quad z = \pm a. \end{aligned} \right.$$

D'après le raisonnement fait au commencement du paragraphe précédent et d'autres considérations développées auparavant, nous sommes conduit à supposer qu'une solution particulière de la question est de la forme

$$V = A e^{-lt} \cos px \cos qy \cos rz,$$

l, p, q, r désignant des nombres, et A une constante arbitraire. Cette valeur satisfait à l'équation (1), à la condition que l'on ait

$$l = K^2(p^2 + q^2 + r^2),$$

et alors elle devient

(3) $$V = A e^{-K^2(p^2+q^2+r^2)t} \cos px \cos qy \cos rz.$$

Les conditions (2) se réduisent aux équations suivantes :

(4) $$\begin{cases} pa \tan pa = \dfrac{a}{n}, \\ qa \tan qa = \dfrac{a}{n}, \\ ra \tan ra = \dfrac{a}{n}, \end{cases}$$

qui se ramènent à la suivante :

(5) $$u \tan u = \frac{a}{n},$$

en désignant par u l'un quelconque des produits pa, qa et ra.

Cette équation, à laquelle nous sommes déjà arrivé au paragraphe précédent, admet une infinité de racines positives que nous supposerons rangées par ordre de grandeur à partir de la plus petite; soient m_1, m_2, m_3 les quotients des racines par a; A_i, A_j, A_k trois constantes arbitraires. Dans l'état actuel de la question, nous aurons pour solution particulière

$$\begin{aligned} U &= A_i A_j A_k e^{-K^2(m_i^2+m_j^2+m_k^2)t} \cos m_i x \cos m_j y \cos m_k z \\ &= A_i e^{-K^2 m_i^2 t} \cos m_i x \,.\, A_j e^{-K^2 m_j^2 t} \cos m_j y \,.\, A_k e^{-K^2 m_k^2 t} \cos m_k z. \end{aligned}$$

Nous obtiendrons une solution plus générale en faisant la somme des expressions semblables pour toutes les valeurs entières et positives de i, j, k, et nous obtiendrons ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & [A_1 e^{K^2 m_1^2 t} \cos m_1 x + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t} \cos m_2 x + \ldots]. \\ & + [A_1 e^{-K^2 m_1^2 t} \cos m_1 y + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t} \cos m_2 y + \ldots], \\ & + [A_1 e^{-K^2 m_1^2 t} \cos m_1 z + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t} \cos m_2 z + \ldots]. \end{aligned}\right.$$

Mais pour $t = 0$ on doit avoir $V = 1$, quels que soient x, y, z entre les limites $-a$ et a. On satisfera à cette condition si, quel que soit x entre $-a$ et a, ou simplement 0 et a, on a

$$A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \ldots = 1,$$

ce qui, d'après le paragraphe précédent, conduit à prendre

$$(7)\quad A_i = \frac{4 \sin m_i a}{2 a m_i + \sin 2 m_i a};$$

l'équation (6) donnera, par suite, la solution complète du problème.

20. D'après cette équation, on voit que V est le produit de trois fonctions semblables qui ne dépendent respectivement que de x, y, z et du temps. Il est d'ailleurs facile de vérifier qu'un pareil produit peut satisfaire à l'équation (1).

Soient, en effet, X, Y, Z trois fonctions de t, mais qui ne renferment respectivement que x, y, z, et posons

$$V = XYZ.$$

En portant cette expression dans l'équation (1), on trouve la suivante :

$$YZ \frac{dX}{dt} + ZX \frac{dY}{dt} + XY \frac{dZ}{dt} = K^2 \left(YZ \frac{d^2X}{dx^2} + ZX \frac{d^2Y}{dy^2} + XY \frac{d^2Z}{dz^2} \right),$$

qui sera vérifiée en posant

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{K^2} \frac{dX}{dt}, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{1}{K^2} \frac{dY}{dt}, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{K^2} \frac{dZ}{dt}.$$

On satisfera aux conditions relatives à la surface en posant

$$\pm \frac{dX}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a,$$

$$\pm \frac{dY}{dy} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{»} \quad y = \pm a,$$

$$\pm \frac{dZ}{dz} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{»} \quad z = \pm a,$$

et il est facile de reconnaître, en se reportant au n° **2**, que l'on retombe sur la solution (6).

21. Si le temps écoulé est devenu suffisamment grand, V se réduira sensiblement à son premier terme correspondant à $i = j = k = 1$, et l'on aura par suite

$$(7) \qquad V = \frac{4^3 \sin^3 m_1 a}{(2am_1 + \sin 2m_1 a)^3} \cos m_1 x \cos m_1 y \cos m_1 z \, e^{-3K^2 m_1^2 t}.$$

22. La température moyenne, au bout du temps t, a pour expression

$$\frac{1}{2^3 a^3} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} V \, dx \, dy \, dz$$

$$= \frac{1}{2^3 a^3} \int_{-a}^{a} X \, dx \int_{-a}^{a} Y \, dy \int_{-a}^{a} Z \, dz = \frac{1}{2^3 a^3} \left(\int_{-a}^{a} X \, dx \right)^3,$$

expression qu'il est facile de calculer et dont il nous paraît inutile de donner la valeur.

23. Lorsque a est très petit, la plus petite racine de l'équation (5) est à très peu près égale à $\sqrt{\frac{a}{n}}$, et l'on a

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{na}}.$$

L'expression (7) devient, eu égard à la petite valeur de $m_1 a$,

$$V = e^{-\frac{3K^2}{an} t} \cos \frac{x}{\sqrt{na}} \cos \frac{y}{\sqrt{na}} \cos \frac{z}{\sqrt{na}}.$$

Au centre d'une face on a

$$V = e^{-\frac{3K^2}{an}t} \cos\sqrt{\frac{a}{n}} = e^{-\frac{3K^2}{an}t}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{n}\right),$$

et, en se reportant à la formule (13) du n° **13**, on reconnaît que cette température est la même que la surface de la sphère inscrite.

24. Si les dimensions du cube sont très grandes, on aura, à très peu près,

$$m_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad m_2 = \frac{3\pi}{2a}, \quad m_3 = \frac{5\pi}{2a},$$

et il sera facile de former l'expression de V.

§ VII. — *Mouvement varié de la chaleur dans un solide indéfini dans tous les sens.*

25. Nous n'avons ici qu'à déterminer la forme de l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{k^2}\frac{dV}{dt},$$

qui satisfait à la condition

$$V = F(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

$F(x, y, z)$ étant une fonction donnée qui représente la température au point (x, y, z).

Soient α, β, γ trois constantes arbitraires. Nous avons vu (n° **10**) que l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dx}$$

est satisfaite par

$$V = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}},$$

et (n° **20**) que l'équation (1) est satisfaite par le produit de trois fonctions semblables respectivement en x, y, z. Nous aurons donc la solution particulière

$$V = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}}\,\frac{e^{-\frac{(y-\beta)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}}\,\frac{e^{-\frac{(z-\gamma)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}}.$$

Si f désigne une fonction arbitraire, nous obtiendrons une autre solution particulière en multipliant cette expression par $f(\alpha, \beta, \gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$, et enfin une solution plus générale en intégrant, par rapport à α, β, γ, entre les limites $-\infty$ et ∞. On trouve ainsi

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma . f(\alpha.\beta.\gamma)\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]}{4K^2t}}.$$

En posant

$$\frac{\alpha - x}{2K\sqrt{t}} = u, \quad \frac{\beta - y}{2K\sqrt{t}} = v, \quad \frac{\gamma - z}{2K\sqrt{t}} = w,$$

u, v, w étant des variables que l'on substitue respectivement à α, β, γ, il vient

$$(3)\quad V = 8\mathrm{I}^3 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-(u^2+v^2+w^2)} f(x + 2uK\sqrt{t}, y + 2vK\sqrt{t}, z + 2wK\sqrt{t})$$

et nous devons avoir

$$F(x, y, z) = 8K^3 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-(u^2+v^2+w^2)} f(x, y, z),$$

ou

$$F(x, y, z) = 8K^3 f(x, y, z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-}^{\infty} e^{-v^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw$$
$$= 8K^3 \pi^{\frac{3}{2}} f(x, y, z).$$

En portant la valeur de la fonction f déduite de cette équation dans la formule (3), on obtient, pour la solution du problème,

$$(4)\quad V = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2uK\sqrt{t}, y + 2vK\sqrt{t}, z + 2wK\sqrt{t})\, e^{(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw.$$

DÉVELOPPEMENTS

SUR QUELQUES QUESTIONS QUI SE RATTACHENT A LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR.

§ I.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE BESSEL

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0, \tag{1}$$

DANS LAQUELLE m ET n SONT DEUX CONSTANTES.

26. Cette équation est une généralisation de l'équation différentielle à laquelle nous sommes arrivé en nous occupant du mouvement de la chaleur dans un cylindre circulaire (nº **14**) où nous avions $m = 1$.

27. *Intégration au moyen des séries.* — Cherchons à satisfaire à l'équation (1) au moyen d'une suite

$$y = \Sigma A_j x^j \tag{2}$$

de termes proportionnels à des puissances de x. Si l'on substitue cette expression dans l'équation ci-dessus et que l'on égale à zéro le coefficient du terme en x^{j-2}, on trouve

$$A_j j(j + m - 1) + n A_{j-2} = 0. \tag{3}$$

Il résulte de là que le problème a généralement deux solutions, l'une qui consiste à exprimer A_j au moyen de A_{j-2}, A_{j-4}, ..., ce qui exige que les puissances de x soient entières, paires et positives pour que l'on puisse s'arrêter à la puissance zéro. La seconde solution s'obtiendra en opérant en sens inverse.

1º Supposons que j soit un nombre entier pair que nous désignerons par $2i$, et, pour plus de simplicité, que l'on prenne $A_0 = 1$; l'équation (3) donne, en y faisant successivement $j = 2$, $j = 4$, ...,

$j = 2i, \ldots,$

$$A_2 = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)}{1(m+1)}$$

$$A_4 = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_2}{2(m+3)},$$

$$A_6 = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_4}{3(m+5)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{2i} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_{2i-2}}{i(m+2i-1)},$$

d'où

$$A_{2i} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^i}{1.2.3\ldots i(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(m+2i-1)}.$$

Nous aurons ainsi, comme solution particulière de l'équation (1), la série paire

$$(4) \qquad y_1 = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^i x^{2i}}{1.2.3\ldots i(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-1)}.$$

2° Si nous posons

$$j = -m + 1 + 2i,$$

l'équation (3) donne

$$A_{-m+2i+1} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_{-m+2i-1}}{i(-m+1+2i)},$$

et successivement, en supposant $i = 1$, $i = 2$, ...,

$$A_{-m+3} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_{-m+1}}{1(-m+3)},$$

$$A_{-m+5} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_{-m+3}}{2(-m+5)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{-m+1+2i} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)A_{-m-1+2i}}{i(-m+1+2i)},$$

d'où, en prenant $A_{-m+1} = 1$,

$$A_{-m+1+2i} = \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^i}{1.2.3\ldots i(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+1+2i)}.$$

L'équation (1) sera donc encore satisfaite par la série

$$(5)\quad y_2 = x^{-m+1} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^i x^{-m+1+2i}}{1.2.3\ldots i(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+1+2i)}.$$

Si les deux séries (4) et (5) étaient toujours admissibles, en faisant leur somme après les avoir respectivement multipliées par deux constantes arbitraires, on obtiendrait l'intégrale complète de l'équation (1).

Mais nous remarquerons : 1° que, pour $m = 1$, les deux séries sont identiques et ne conduisent ainsi qu'à une intégrale particulière; 2° que la première est inadmissible quand m est un nombre négatif impair, puisque l'un des dénominateurs deviendrait nul; 3° qu'il en est de même de la seconde quand m est un nombre positif pair. Mais, quoi qu'il en soit, l'une des séries subsistera toujours, et si on la désigne par Y, et que l'on représente par A et B deux constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$(6)\qquad y = AY + BY \int \frac{dx}{x^m Y^2} \quad (^1).$$

28. *Expression de l'intégrale de l'équation au moyen d'intégrales définies.* — Soient θ une variable quelconque et α une constante.

En développant en série, on obtient

$$(7)\qquad \cos(\alpha\cos\theta) = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-\alpha^2)^i \cos^{2i}\theta}{1.2.3\ldots 2i};$$

---

(1) On arrive à ce résultat en posant $y = UY$, U étant une fonction inconnue de x; en substituant, on obtient une équation du second ordre en U que l'on peut intégrer.

on a d'ailleurs, lorsque m est plus grand que zéro [1],

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \cos^{2i}\theta \sin^{m-1}\theta\, d\theta \\ &= \frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-3)(m+2i-1)} \int_0^\pi \sin^{m-1}\theta\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Si donc on multiplie l'équation (7) par $\sin^{m-1}\theta\, d\theta$ et que l'on intègre entre o et π, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(\alpha\cos\theta)\sin^{m-1}\theta\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin^{m-1}\theta\, d\theta + \sum_1^\infty \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^i \sin^{m-1}\theta\, d\theta}{1.2.3\ldots i(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-1)}, \end{aligned}$$

---

[1] En désignant par A_{2i} cette intégrale définie et intégrant par parties, on reconnaît facilement que l'on a

$$\begin{aligned} A_{2i} &= \int_0^\pi \cos^{2i-1}\theta \frac{d\sin^m\theta}{m} = \frac{2i-1}{m}\int_0^\pi \sin^{m+1}\theta \cos\theta^{2i-2}\, d\theta \\ &= \frac{2i-1}{m}\int_0^\pi \sin^{m-1}\theta(1-\cos^2\theta)\cos\theta^{2i-2}\, d\theta = \frac{2i-1}{m}(A_{2i-2}-A_{2i}), \end{aligned}$$

d'où

$$A_{2i} = \frac{2i-1}{m+2i-1} A_{2i-2},$$

et de même

$$A_{2i-2} = \frac{2i-3}{m+2i-3} A_{2i-4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_2 = \frac{1}{m+1} A_0,$$

avec

$$A_0 = \int_0^\pi \sin^{m-1}\theta\, d\theta.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on arrive à la formule (8) du texte.

En posant $\alpha = x\sqrt{n}$, il vient

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\sin^{m-1}\theta\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin^{m-1}\theta\,d\theta\left[1+\sum_1^\infty \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^i x^{2i}}{1.2.3\ldots i(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-1)}\right]. \end{aligned} \right.$$

Or le second facteur du second membre de cette formule n'est autre chose que la série (4) que nous avons représentée par y_1; en continuant à désigner par la même lettre cette fonction multipliée par une constante arbitraire, on voit que

$$(10)\qquad y_1 = A\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\sin^{m-1}\theta\,d\theta$$

sera une intégrale particulière de l'équation (1), à la condition que l'on ait $m > 0$.

Si l'on remarque que la série (5) se déduit de la série (4), en changeant dans cette dernière $-m$ en $m+2$, et multipliant le résultat par x^{1-m}, on voit que l'on peut poser, en introduisant une constante arbitraire,

$$(11)\qquad y_2 = Bx^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\sin^{-m+1}\theta\,d\theta,$$

à la condition que $-m+2 > 0$.

Ainsi donc l'intégrale générale de l'équation (1) peut être représentée par

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & A\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\sin^{m-1}\theta\,d\theta, \\ & + Bx^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\sin^{-m+1}\theta\,d\theta, \end{aligned} \right.$$

lorsque l'on aura

$$m \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 2 \end{smallmatrix}.$$

Il n'y a pas lieu de se préoccuper de ces deux limites; en effet, pour $m = 0$, l'équation (1) s'intègre immédiatement, et pour $m = 2$, en posant $y = \frac{z}{x}$, cette équation se réduit à

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + nz = 0,$$

d'où

$$y = \frac{A\cos\sqrt{n}\,x + B\sin\sqrt{n}\,x}{x}.$$

Si l'on suppose $m = 1$, les deux intégrales de l'équation (12) deviennent identiques, et cette équation ne fait plus connaître qu'une intégrale particulière de l'équation (1). Pour obtenir l'intégrale générale de cette dernière équation, désignons par δm une quantité infiniment petite et posons $m = 1 + \delta m$; nous aurons

$$\begin{aligned} \sin^{m-1}\theta &= \sin^{\delta m}\theta = 1 + \delta m.\log\theta, \\ \sin^{1-m}\theta &= \sin^{-\delta m}\theta = 1 - \delta m.\log\theta, \\ x^{1-m} &= \quad x^{-\delta m} = 1 - \delta m.\log x; \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} y = (A+B)\int_0^\pi &\cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\,d\theta \\ &+ \delta m\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\,[A\log\sin\theta - B(\log x + \log\sin\theta)]\,d\theta. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$A + B = A', \quad A\,\delta m = B',$$

il vient

$$\begin{aligned} y = A'\int_0^\pi &\cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\,d\theta \\ &+ \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\,d\theta\,(B'\log x\sin^2\theta - A'\,\delta m.\log x\sin\theta). \end{aligned}$$

En supposant maintenant $\delta m = 0$ et supprimant les accents de A

et B, on trouve

$$y = A\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\,d\theta + B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\theta)\log x \sin^2\theta\,d\theta$$

pour l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

§ II.

EXPRESSION D'UNE FONCTION, ENTRE DES LIMITES DONNÉES DE LA VARIABLE, EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE.

29. Si u désigne un arc quelconque, on a la relation (¹)

$$(a) \qquad \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos mu = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}.$$

Soit $F(x)$ une fonction quelconque assujettie seulement à la condition qu'elle reste continue et ne devienne pas infinie entre les limites a et b de x. Nous supposerons que la valeur absolue de la dif-

---

(¹) En effet, si dans l'expression

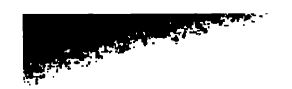
$$y = \tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos mu$$

on remplace les cosinus par leurs équivalents en exponentielles imaginaires et que l'on pose $i = \sqrt{-1}$, on trouve

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\left[1 + \begin{pmatrix} e^{iu} + e^{2iu} + \ldots + e^{miu} \\ + e^{-iu} + e^{-2iu} + \ldots + e^{-miu} \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{i(m+1)u} - e^{iu}}{e^{2u} - 1} + \frac{e^{-i(m+1)u} - e^{-iu}}{e^{-iu} - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{imu} + e^{-imu} - e^{i(m+1)u} - e^{-i(m+1)u}}{2 - e^{iu} - e^{-iu}}\right). \end{aligned}$$

En revenant maintenant des imaginaires aux fonctions trigonométriques, il vient

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\cos mu - \cos(m+1)u}{1 - \cos u} = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}.$$



... inférieure à 2π. En désignant par α ... nous poserons

$$u = x - \alpha.$$

... ensuite ce que devient l'équation (a) par ... intégrerons entre les limites ci-dessus. Nous obtien-

$$\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b F(\alpha)\cos i(x-\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{F(\alpha)\sin(m+\frac{1}{2})(x-\alpha)\,d\alpha}{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{F(\alpha)\sin(m+\frac{1}{2})(\alpha-x)\,d\alpha}{\sin\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)}.$$

Le premier membre de cette équation représente une fonction de x qui est périodique et dont la période est 2π, puisqu'il ne change pas de valeur quand on augmente la variable d'un multiple de $\pm 2\pi$. Pour une valeur donnée de x, comprise entre a et b, le dénominateur du second membre de l'équation ne s'annulera que pour la seule valeur x de α, en raison de la restriction apportée à la valeur de $b - a$. Mais si, k étant un nombre entier positif, on avait $b < a + 2k\pi$, $b > a + 2(k-1)\pi$, le dénominateur dont il s'agit s'annulerait pour une valeur x de α comprise entre a et $a + \pi$, et pour les valeurs suivantes, $x + \pi, \ldots, x + 2(k-1)\pi$. Quant à présent, nous n'avons pas à tenir compte de cette observation qui s'étend facilement d'ailleurs au cas où on aurait $b - a > -(2k+1)\pi$ et $< -2k\pi$.

Supposons maintenant que le coefficient m soit extrêmement grand, sauf à le considérer plus tard comme infini.

L'arc $(m+\frac{1}{2})(\alpha - x)$ augmentera de 2π quand α augmentera de la quantité extrêmement petite $\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}$. Si x n'est pas compris entre α et $\alpha + \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}$, la fonction $\frac{F(\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}$ ne variera que d'une quantité extrêmement petite, que nous négligerons.

En posant $\omega = \alpha - x$, la partie de l'intégrale du second membre de l'équation (1) qui correspond aux limites α et $\alpha + \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}$ se réduira à

$$\frac{1}{2}\frac{F(\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\int_{\omega}^{\omega+\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}} \sin(m+\tfrac{1}{2})\,\omega\,.\,d\omega = 0.$$

Si donc a_1 et b_1 sont compris entre a et b, et si x n'est pas compris entre les deux premières de ces valeurs, on a

$$\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{F(\alpha)\sin(m+\frac{1}{2})(\alpha - x)\,d\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)} = 0.$$

La valeur de l'intégrale qu'il s'agit de déterminer se réduit donc à celle de

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(x+\omega)\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\,\omega\,.\,d\omega}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

en désignant par ε une quantité infiniment petite. Comme la fonction $F(x)$ est supposée continue entre a et b, on peut prendre $F(x+\omega) = F(x)$ et, en remplaçant $\sin\frac{\omega}{2}$ par $\frac{\omega}{2}$, l'expression (2) devient

$$(3)\qquad F(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\,\omega\,.\,d\omega}{\omega}.$$

Mais, comme cette intégrale n'a de valeur sensible que pour des valeurs infiniment petites de ω, on peut l'étendre entre des limites $-\infty$ et ∞, et l'on obtient ainsi π pour résultat ([1]).

([1]) Soit en effet, n étant positif, l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx\,dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx\,dnx}{nx};$$

on voit qu'elle se ramène à la suivante :

$$(a)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x} = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x} - \int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x\,dx}{x} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x}.$$

En désignant par q un nombre positif, considérons maintenant la nouvelle in-

Si nous remplaçons pour m l'expression de ***extrêmement grand*** par celle de ***infiniment grand,*** le raisonnement qui précède ne laisse rien à désirer au point de vue de la rigueur, et l'équation (1) se réduit ainsi à la suivante :

$$(4) \qquad \pi F(x) = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b F(\alpha)\cos i(x-\alpha)\,d\alpha,$$

qui fait connaître le développement en série, dont le terme général est

$$A_j \sin jx + B_j \cos jx,$$

de la portion de la fonction $F(x)$ limitée par $x = a$ et $x = b$, la valeur absolue de $b - a$ étant au plus égale à 2π.

---

tégrale

$$(b)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-qx}\frac{\sin x}{x} \\ \displaystyle = \int_0^{\infty} e^{-qx}\left[1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \cdots + \frac{x^{2i}}{1.2.3\ldots(2i+1)} + \cdots\right]dx; \end{cases}$$

on est ramené à déterminer une valeur de la forme

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-qx}x^n\,dx.$$

En intégrant par parties, on trouve la relation

$$A_n = \frac{n}{q}A_{2n-1},$$

et de même

$$A_{n-1} = \frac{n-1}{q}A_{2n-2},$$

$$A_2 = \frac{2}{q}A_2,$$

$$A_1 = \frac{1}{q}A_0,$$

d'où

$$A_n = \frac{1.2.3\ldots n}{q^n}A_0;$$

or, on a évidemment

$$A_0 = \frac{1}{q},$$

30. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des valeurs de x comprises entre a et b, sans supposer que la variable puisse devenir égale à l'une de ces limites.

Admettons que l'on ait $x = a$; dans ce cas, l'intégrale de l'expression (3) devra être prise entre o et ε ou o et ∞; de sorte qu'elle se réduit à $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$(5) \qquad \frac{\pi}{2}F(a) = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b F(\alpha)\cos i(a-\alpha)\,d\alpha.$$

Soit maintenant $x = b$; l'intégrale de l'expression (3) devra être prise entre les limites $-\varepsilon$ et o ou $-\infty$ et o, ce qui donne

$$-\int_0^{-\infty} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}\,d\omega,$$

---

par suite

$$c) \qquad A_n = \frac{1.2.3\ldots n}{q^{n+1}}.$$

L'équation (b) devient ainsi

$$\int_0^{\infty} e^{-qx}\frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{1}{q} + \sum \frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{1}{q}\right)^{2i+1} = \text{arc tang}\,\frac{1}{q}.$$

Si $q = 0$, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

par suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} = \pi.$$

Supposons n négatif, nous aurons, en remplaçant n par $-n$,

$$\varphi(-n) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx\,dx}{x} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx\,dn dx}{nx} = -\frac{\pi}{2}.$$

On voit ainsi que la fonction $\varphi(n)$ est essentiellement discontinue, qu'elle passe brusquement de $\frac{\pi}{2}$ pour $n > 0$, à zéro pour $n = 0$, et à $-\frac{\pi}{2}$ pour $n < 0$.

ou, en remplaçant ω par $-\omega$,

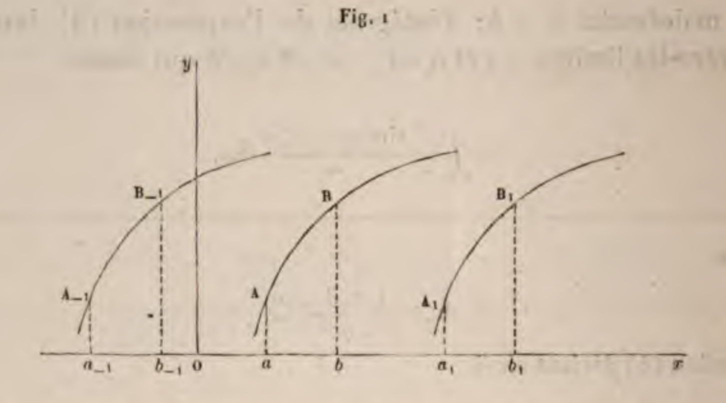
$$\int_0^\infty \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons donc

$$(5') \qquad \pi F(b) = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b F(\alpha)\cos i(b-\alpha)\,d\alpha.$$

31. Considérons la courbe représentée par l'équation $y = \pi F(x)$. Soient (*fig.* 1) O l'origine des coordonnées $Oa = a$, $Ob = b$; AB l'arc de

Fig. 1



la courbe limité par les ordonnées des points a et b. Concevons que l'on transporte l'arc AB parallèlement à Ox de $\pm 2i\pi$, i étant un nombre entier positif, et distinguons par l'indice $\pm i$ les positions que prennent les points a, b, A, B.

Le second membre de l'équation (4) représentera les arcs AB, A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{-1}B_{-1}$, $A_{-2}B_{-2}$, puisqu'elle ne change pas de valeur quand on y remplace x par $x \pm 2k\pi$.

Entre les points b et a_1, entre $x = b$, $x = a + 2\pi$, il n'y a pas de valeur de x qui annule le dénominateur de la fonction de l'intégrale du second membre de l'équation (1); cette intégrale est donc nulle; en d'autres termes, le premier membre de l'équation (4) se réduit à zéro. On voit ainsi que le second membre de la même équation représentera les portions ba_1, b_1a_2, ..., ab_{-1}, $a_{-1}b_{-2}$, ... de l'axe des x.

32. Supposons que l'on ait

$$b = a + 2\pi + h,$$

h étant censé inférieur à 2π. Entre $n \gtrless^{a}_{a+h}$, l'expression $\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)$ s'annule pour $\alpha = x$ et $\alpha = 2\pi + x$. L'intégrale du second membre de l'équation (1) se réduit donc à la valeur (3) ajoutée à ce qu'elle devient quand on y remplace x par $x + 2\pi$. On a ainsi

$$(6)\quad \pi[\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x + 2\pi)] = \frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{F}(x)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}(\alpha)\cos i(x - \alpha)\,d\alpha.$$

Si h était plus grand que 2π, mais plus petit que 4π, on aurait de même

$$\pi[\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x + 2\pi) + \mathrm{F}(x + 4\pi)]$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{F}(x)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}(\alpha)\cos i(x - \alpha)\,d\alpha,$$

et, en général, le second membre de l'équation (4) représentera la fonction

$$\pi[\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x + 2\pi) + \ldots + \mathrm{F}(x + 2i\pi)]$$

pour

$$b - a \leqq 2\pi(1 + i) \quad \text{et} \quad b - a > 2\pi i.$$

33. En supposant $b - a < 2\pi$, admettons que, pour une valeur c de x comprise entre a et b, $\mathrm{F}(x)$ passe brusquement d'une valeur M à une autre N. La série (4) donnera encore $\mathrm{F}(x)$ entre $x = a$, $x = c$, entre $x = c$ et $x = b$. Il s'agit de savoir ce que donne cette série pour $x = c$.

En se reportant aux formules (5) et (5′), on a

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{M} = \frac{1}{2}\int_a^c \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^c \mathrm{F}(\alpha)\cos i(c - \alpha)\,d\alpha,$$
$$\frac{\pi}{2}\mathrm{N} = \frac{1}{2}\int_c^b \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^c \mathrm{F}(\alpha)\cos i(c - \alpha)\,d\alpha;$$

d'où

$$\frac{M+N}{2} = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b F(\alpha)\cos i(c-\alpha)\,d\alpha.$$

Donc la série donne la demi-somme des valeurs de la fonction correspondant à la valeur de x pour laquelle cette fonction devient discontinue.

34. Si dans l'équation (4) on suppose $a=0$, $b=2\pi$, puis $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}$, on obtient les deux formules suivantes :

$$(7)\qquad \pi F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos i(x-\alpha)\,d\alpha,$$

$$(8)\qquad \pi F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\alpha)\,d\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\alpha)\cos i(x-\alpha)\,d\alpha,$$

qui permettent respectivement de représenter la portion de $F(x)$ comprise entre $x=0$, $x=2\pi$ et $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

35. Supposons que l'intervalle dans lequel on veut représenter $F(x$ par une série trigonométrique, au lieu d'être 2π, soit un nombre quelconque $2k$. Posons, à cet effet,

$$x = \pi\frac{y}{k},\quad \alpha = \frac{\pi\beta}{k}.$$

x rentre dans les conditions du numéro précédent.

Les équations (7) et (8) deviennent

$$F\left(\frac{\pi y}{k}\right) = \frac{1}{2k}\int_0^{2k} F\left(\frac{\pi\beta}{k}\right)d\beta + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{2k} F\left(\frac{\pi\beta}{k}\right)\cos\frac{i\pi}{k}(y-\beta)\,d\beta,$$

$$F\left(\pi\frac{y}{k}\right) = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} F\left(\frac{\pi\beta}{k}\right)d\beta + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-k}^{k} F\left(\frac{\pi\beta}{k}\right)\cos\frac{i\pi}{k}(y-\beta)\,d\beta.$$

Or $F\left(\pi\frac{y}{k}\right)$ peut être considéré comme une fonction arbitraire de y:

il vient donc, en remplaçant $F\left(\pi\frac{y}{k}\right)$ par $F(y)$, puis y par x et β par α,

$$(9)\quad F(x)=\frac{1}{2k}\int_0^{2k}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{2k}F(\alpha)\cos\frac{i\pi}{k}(x-\alpha)\,d\alpha,$$

$$(10)\quad F(x)=\frac{1}{2k}\int_{-k}^{k}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-k}^{k}F(\alpha)\cos\frac{i\pi}{k}(x-a)\,d\alpha.$$

36. Supposons que la fonction $F(x)$ soit telle que $F(-x)=F(x)$; l'équation (10) peut se mettre sous la forme

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}F(x)=\frac{1}{2k}\int_{-k}^{k}F(\alpha)\,d\alpha&+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{i\pi x}{k}\int_{-k}^{k}F(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha\\&+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{k}\int_{-k}^{k}F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha.\end{aligned}\right.$$

On a

$$\int_{-k}^{k}F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha=\int_0^{k}F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha-\int_0^{-k}F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha=0,$$

en remarquant que dans la seconde intégrale on peut remplacer α par $-\alpha$, $-k$ par k et $F(-\alpha)$ par $F(\alpha)$.

On a de plus

$$\int_{-k}^{k}F(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha=2\int_0^{k}F(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha.$$

L'équation (11), ou plutôt l'équation (10), devient ainsi

$$(12)\quad F(x)=\frac{1}{k}\int_0^{k}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{i\pi x}{k}\int_0^{k}F(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha.$$

Si $k=\pi$, on a

$$(12')\quad F(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\cos ix\int_0^{\pi}F(\alpha)\cos i\alpha\,d\alpha.$$

37. Admettons maintenant que l'on ait $F(-x) = -F(x)$. On reconnaît facilement que

$$\int_{-k}^{k} F(\alpha)\cos\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha = 0, \quad \int_{-k}^{k} F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha = 2\int_{0}^{k} F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha$$

et l'équation (10) se réduit à la suivante :

$$(13) \qquad F(x) = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{k}\int_{0}^{k} F(\alpha)\sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha.$$

Lorsque $k = \pi$, on a

$$(13') \qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sin ix\int_{0}^{k} F(\alpha)\sin i\alpha\, a\alpha.$$

Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers.

38. *La fonction* $F(x)$ *est constante entre* $x = 0$ *et* $x = k$ *et prend la même valeur changée de signe entre* $x = 0$ *et* $x = -k$.

Il suffit de supposer $F(x) = 1$, car du résultat obtenu dans cette hypothèse on en déduira tout autre par une simple multiplication. L'équation (13) reçoit évidemment ici son application; en y faisant $F(x) = 1$, et remarquant que $1 - \cos i\pi = 0$, lorsque i est pair et $1 - \cos i\pi = 2$ quand i est impair, on trouve

$$(14) \qquad 1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{k} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{k} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{k} + \ldots\right).$$

série qui est périodique et dont la période est $2k$.

Si $k = \pi$, l'équation précédente devient

$$(a \qquad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots.$$

En remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$, cette formule se transforme dans la

suivante :

$$(b) \qquad \frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$$

qui s'applique entre les limites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Si l'on fait successivement $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (b), on obtient les suivantes

$$(c) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

$$(d) \qquad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots.$$

En multipliant l'équation (b) par dx et intégrant entre les limites o et x, on trouve

$$(e) \qquad \frac{\pi x}{4} = \sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x + \ldots,$$

et, en faisant $x = \frac{\pi}{2}$, on a cette relation, qui est connue depuis longtemps,

$$(f) \qquad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

39. *La fonction* $F(x)$ *est égale à* x *entre* $x = -k$, $x = k$.

Comme on a $-F(x) = F(-x)$, il faut encore se reporter à l'équation (13) qui donne, en y supposant $F(x) = x$,

$$x = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{k}\int_0^k \alpha \sin\frac{i\pi\alpha}{k}\,d\alpha = -\frac{2k}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos i\pi}{i}\sin\frac{i\pi x}{k}$$

ou

$$(15) \quad x = \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{k} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{k} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{k} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{k} + \ldots\right).$$

En supposant $k = \pi$, on obtient la formule suivante

$$(g) \qquad \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots,$$

qui est due à Euler. En y faisant $x = \frac{\pi}{2}$, on retombe sur la formule (c) du numéro précédent.

40. *La fonction* $F(x)$ *est égale à* x^3 *entre* $x = -\pi$ *et* $x = \pi$.

Nous suivrons exactement la même marche qu'au numéro précédent, et nous aurons

$$\frac{x^3}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sin ix \int_0^{\pi} \alpha^3 \sin i\alpha \, d\alpha = -\sum_1^{\infty}\sin ix\left(\pi^2 - \frac{2.3}{i^2}\right)\frac{\cos i\pi}{i}$$

ou

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^3}{2} = \left(\pi^2 - \dfrac{2.3}{1^2}\right)\sin x - \left(\pi^2 - \dfrac{2.3}{2^2}\right)\dfrac{\sin 2x}{2} \\ \qquad + \left(\pi^2 - \dfrac{2.3}{3^2}\right)\dfrac{\sin 3x}{3} + \ldots \end{cases}$$

41. *La fonction* $F(x)$ *est égale à* x *entre* $x = 0$ *et* $x = k$ *et à* $-x$ *entre* 0 *et* $-k$. — Comme on a ici $F(x) = F(-x)$, c'est à la formule (12) qu'il faut avoir recours, et elle donne, en y faisant $F(x) = x$,

$$x = \frac{1}{k}\int_0^k \alpha \, d\alpha + \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{i\pi x}{k}\int_0^k \alpha \cos\frac{i\pi\alpha}{k}\, d\alpha,$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(17)\qquad x = \frac{k}{2} - \frac{4k}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{k} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{k} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{k} + \cdots\right).$$

En faisant $k = \pi$ dans cette formule, on arrive à la suivante

$$(h)\qquad x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right).$$

42. *Développement entre* $x = 0$ *et* $x = \pi$ *de* $\sin x$ *en cosinus d'arcs multiples pairs de* x. — Ici il faut avoir recours à la formule (9), dans laquelle on fera $F(x) = \sin x$ et $2k = \pi$. On reconnaît facilement qu'elle devient

$$\frac{\pi}{2}\sin x = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\cos 2ix \int_0^{\pi} \sin\alpha \cos 2i\alpha \, d\alpha + \sin 2ix \int_0^{\pi} \sin\alpha \sin 2i\alpha \, d\alpha\right).$$

Mais on a

$$\int_0^\pi \sin\alpha \sin 2i\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(2i+1)\alpha - \cos(2i+1)\alpha]\, d\alpha = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin\alpha \cos 2i\alpha \, d\alpha = -\frac{2}{(2i-1)(2i+1)},$$

d'où

$$\frac{\pi \sin x}{2} = 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos 2ix}{(2i-1)(2i+1)},$$

ou

$$(18) \qquad \frac{\pi \sin x}{4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4ix}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \cdots\right).$$

Tel est le développement cherché. En y faisant $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$(i) \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots.$$

43. *Expression trigonométrique de l'ordonnée du contour d'un trapèze déterminée par une parallèle à la base d'un triangle équilatéral en supposant cette base égale à π.* — Soient

Fig. 2.

$AB = \pi$ la grande base du trapèze;
ab sa petite base;
$a'b'$ la projection de ab sur AB;
$p = Aa' = aa' = Bb'$.

Prenons la direction de AB pour axe des x et sa perpendiculaire en A pour axe des y. Supposons que l'on ait

$$-F(x) = F(-x)$$

entre $-\pi$ et π. Nous devrons faire usage de la formule (12'), qui représentera également l'ordonnée du contour AabB et celle de son symétrique par rapport aux axes.

De A à B ou entre $x=0$ et $x=p$, on a

$$y=F(x)=x.$$

De a à b ou entre $x=p$ et $x=\pi-p$, on a

$$F(x)=p.$$

De b à B ou entre $x=\pi-p$ et $x=\pi$, on a

$$F(x)=\pi-x.$$

La formule précitée donne ainsi

$$y=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sin ix\left[\int_0^p\alpha\sin i\alpha\,d\alpha+p\int_p^{\pi-p}\sin i\alpha+\int_p^{\pi}(\pi-\alpha)\sin i\alpha\,d\alpha\right].$$

En effectuant les intégrations, on trouve

$$y=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sin i\pi x\frac{\sin ip}{i^2}(1-\cos i\pi),$$

d'où, pour l'équation cherchée,

$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin p\sin x+\frac{\sin 3p\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5p\sin 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

Si l'on suppose $p=\frac{\pi}{2}$, le trapèze devient le triangle équilatéral ACB, dont l'ordonnée de l'ensemble des côtés AC, CB est représentée par

$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

§ III.

EXPRESSION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE AU MOYEN D'INTÉGRALES DÉFINIES.

44. Une fonction arbitraire $F(x)$ qui ne devient pas infinie pour toutes les valeurs positives et négatives sera représentée dans toute son étendue par la formule (10) du n° **35**, en y faisant $k = \infty$. Si nous désignons par ε le rapport infiniment petit $\frac{\pi}{k}$, nous aurons

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos i\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Mais nous pouvons considérer $i\varepsilon$ comme une variable p à laquelle on donne des accroissements infiniment petits $\varepsilon = dp$, et que l'on peut faire croître indéfiniment à partir de zéro. On a ainsi

$$(1)\qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha.$$

On déduit de là

$$(2)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha.$$

45. Lorsque $F(-x) = F(x)$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\sin p\alpha\,d\alpha = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha = 2\int_{0}^{\infty}F(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha,$$

et les formules (1) et (2) se réduisent à la suivante,

$$(3)\qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}dp\cos px\int_{0}^{\infty}F(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha.$$

46. Dans le cas où $F(-x) = -F(x)$, on trouve de la même manière

(4) $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dp \sin px \int_0^{\infty} F(\alpha)\sin p\alpha\, d\alpha.$$

47. Soit $F(x) = e^{-x}$ de $x = 0$ à $x = \infty$ et $F(x) = e^{x}$ de $x = 0$ à $x = -\infty$, on a

$$F(x) = F(-x),$$

et l'on a recours alors à la formule (3), qui donne

(5) $$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dp \cos px \int_0^{\infty} e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{1+p^2}\, dp \quad (^1).$$

---

(1) En effet, on a, en intégrant par parties,

$$\int e^{-\alpha}\cos p\alpha . d\alpha = \frac{1}{p}\left(e^{-\alpha}\sin p\alpha + \int e^{-\alpha}\sin p\alpha . d\alpha\right)$$
$$= \frac{1}{p}\left(e^{-\alpha}\sin p\alpha - \frac{1}{p}e^{-\alpha}\cos p\alpha - \frac{1}{p}\int e^{-\alpha}\cos p\alpha . d\alpha\right),$$

d'où

(a) $$\int_0^{\infty} e^{-\alpha}\cos p\alpha . d\alpha = \frac{1}{1+p^2}.$$

On trouve de la même manière

(b) $$\int_0^{\infty} e^{-\alpha}\sin p\alpha . d\alpha = \frac{p}{1+p^2}.$$

On remarquera que, si l'on pose

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px . dp}{1+p^2},$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin px\, d\log(1+p^2),$$

expression qui est évidemment nulle puisque p et $-p$ donnent dans l'intégrale deux éléments égaux et de signes contraires; y est ainsi indépendant de x, de sorte que l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px\, dp}{1-p^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1+p^2} = \pi.$$

48. Soient $F(x) = e^{-x}$ de $x = 0$ à $x = \infty$, $F(x) = -e^{x}$ de $x = 0$ à $x = -\infty$; nous avons $F(x) = -F(-x)$, et nous n'avons qu'à appliquer la formule (4) qui donne, en y faisant $F(\alpha) = e^{-\alpha}$,

$$(6) \qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p \sin px}{1+p^2}\, dp \quad ([1]).$$

49. Considérons le cas où la fonction $F(x)$ est égale à l'unité entre $x = 1$ et $x = -1$, et nulle pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas comprises entre ces limites. Comme on a $F(-x) = F(x)$, on devra avoir recours à la formule (3), en y faisant $F(x) = 1$. Mais comme, d'après l'hypothèse, $F(x)$ est nulle entre $x = 1$ et $x = \infty$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos p\alpha\, d\alpha$$

se réduit à la suivante

$$\int_0^1 \cos p\alpha\, d\alpha = \frac{\sin p}{p},$$

d'où l'on conclut

$$(7) \qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p \cos px}{p}\, dp.$$

Il est facile, d'ailleurs, de vérifier que cette formule remplit les conditions voulues, car on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin p \cos px}{p}\, dp = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x+1)p}{p}\, dp - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x-1)p}{p}\, dp.$$

Or, si $x > 1$ ([2]), les deux intégrales du second membre de cette formule sont égales à π et se détruisent. Il en est de même si $x < -1$. Maintenant, si x est compris entre -1 et $+1$, les deux intégrales

---

([1]) Nous ferons remarquer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p \sin px\, dp}{1+p^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin px\, d\log(1+p^2) = 0,$$

car les éléments de l'intégrale prennent des signes contraires quand on y change p en $-p$.

([2]) Voir la note de la page 103.

s'ajoutent et donnent pour résultat $\frac{\pi}{2}$, d'où $F(x) = 1$, ce qu'il fallait démontrer (¹).

50. Soit $F(x) = \sin x$ entre $x = -\gamma$ et $x = \gamma$ et $F(x) = 0$ en dehors de ces limites. Comme $F(x) = -F(-x)$, nous devons faire ici l'application de la formule (4), dans laquelle nous ferons $F(\alpha) = \sin\alpha$, et l'intégrale par rapport à α devra être prise seulement entre les limites 0 et γ, puisque $F(\alpha) = 0$ entre $x = \gamma$ et $x = \infty$.

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin px\, dp \int_0^\gamma \sin\alpha \cos p\alpha\, d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (p\sin p\gamma \sin\gamma + \cos p\gamma \cos\gamma - 1)\frac{\sin px}{1-p^2}dp. \end{aligned}$$

§ IV.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SPHÉRIQUES. — FORMULES DE GREEN.

51. *Des fonctions* Y_i. — Nous avons vu (nos **3** et **7**) que l'équation en coordonnées rectangulaires,

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

(¹) Considérons l'intégrale (7) en y remplaçant la limite inférieure 0 par $-\infty$, et posons

$$y = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin p \cos px}{p}dp,$$

nous avons

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \sin p \cos px\, dp,$$

expression qui est nulle, car, pour p et $-p$, deux éléments de l'intégrale sont égaux et de signes contraires. Il suit de là que y est indépendant de x et que l'on a

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin p\cos px}{p} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin p}{p}dp = 2.$$

avait pour équivalente en coordonnées sphériques la suivante

$$(2)\qquad r\frac{d^2rV}{dr^2}+\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2}=0$$

dans laquelle r désigne la distance d'un point quelconque m à l'origine O des coordonnés, θ la colatitude $\widehat{MOz}$, ψ la longitude, c'est-à-dire l'angle formé par le plan mOz avec le plan fixe $z'Ox$, μ le cosinus de l'angle θ.

Cherchons à voir si l'équation (2) ne peut pas être satisfaite par une expression de la forme

$$(3)\qquad V=r^iY_i,$$

dans laquelle i représente un nombre positif quelconque et Y_i une fonction de μ et ψ indépendante de r. En substituant, on trouve pour résultat l'équation

$$(4)\qquad \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_i}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2Y_i}{d\psi^2}+i(i+1)=0.$$

On satisfera plus généralement à l'équation (2) que par la valeur (3) en prenant

$$(5)\qquad V=\sum_{i=0}^{i=\infty}r^iY_i.$$

Nous désignerons sous le nom de *fonction sphérique* toute fonction de μ et ψ, ou de μ seulement qui satisfera à une équation semblable à l'équation (4). Nous dirons aussi, pour simplifier le langage, que Y_i est une *fonction sphérique de l'ordre i.*

52. *Intégrale particulière de l'équation* (4). Supposons que Y_i soit de la forme

$$(a)\qquad Y_i=uw,$$

en désignant par u et w deux fonctions qui ne renferment respectivement

que μ et ψ. L'équation dont il s'agit devient

$$(b) \qquad (1-\mu^2)\left[\frac{1}{u}\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}+i(i+1)\right]+\frac{1}{w}\frac{d^2w}{d\psi^2}=0$$

et sera satisfaite en égalant son second terme à une constante, par suite son premier terme à cette constante changée de signe.

Or, comme dans les questions de Mécanique céleste et de Physique mathématique où interviennent les fonctions sphériques, les exponentielles sont inadmissibles, nous poserons, en désignant par n un nombre quelconque,

$$\frac{1}{w}\frac{d^2w}{d\psi^2}=-n^2;$$

d'où, en désignant par A_n, B_n deux constantes arbitraires,

$$(6) \qquad w = A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi.$$

L'équation (b) se réduit alors à la suivante

$$(c) \qquad \frac{d}{d\mu}\left[\frac{d(1-\mu^2)}{d\mu}u+2\mu u\right]+\left[i(i+1)-\frac{n^2}{1-\mu^2}\right]u=0.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que n est un nombre entier positif.

En posant

$$(d) \qquad u = z(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$$

l'équation (c) devient

$$(e) \qquad (1-\mu^2)\frac{d^2z}{d\mu^2}-2(n+1)\mu\frac{dz}{d\mu}+(i-n)(i+n+1)z=0.$$

Essayons maintenant de satisfaire à cette équation par une suite de la forme

$$(f) \qquad z=\sum_{\nu=0} a_\nu \mu^{p-2\nu}$$

a_ν et p étant des constantes et ν un nombre entier qui a pour valeurs successives 0, 1, 2, ... En égalant à zéro le coefficient de $\mu^{p-2\nu}$ dans le résultat obtenu après avoir introduit la valeur (8) dans l'équation (e), on trouve

$$(g)\qquad \left\{\begin{aligned} & a_{\nu-1}[p-2(\nu-1)](p-2\nu+1) \\ & \quad -2a_\nu[-2p+\nu(2\nu+1)-2(n+1)]\nu \\ & \quad -a_\nu[p^2+(2n+1)p-(i-n)(i+n+1)]=0. \end{aligned}\right.$$

On satisfera à cette équation en égalant à zéro son troisième terme puis l'ensemble des deux premiers. La première des équations secondaires ainsi définies est

$$p^2+(2n+1)p-(i-n)(i+n+1)=0,$$

et a pour racines

$$(h)\qquad p=i-n,$$

$$(h')\qquad p=-(i+n+1).$$

En portant la première de ces valeurs dans l'ensemble des deux premiers termes de l'équation (g) égalé à zéro, on trouve

$$(i)\qquad a_\nu=a_{\nu-1}\frac{[i-n-2(\nu-1)][i-n-(2\nu-1)]}{2\nu[2\nu+1-2(i+1)]},$$

d'où, successivement, en prenant $a_0=1$,

$$(j)\qquad \left\{\begin{aligned} & a_1=-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)}, \\ & a_2=\frac{(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)}{2.4(2i-1)(2i-3)}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En distinguant par les indices i, n la valeur de u qui se rapporte à ces nombres, on déduit des formules (d), (f) et (j) la suivante :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} u_{in}=(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}\Big[&\mu^{i-n}-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)}\mu^{i-n-2} \\ &+\frac{(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)}{2(2i-1)(2i-3)}\mu^{i-n-4}-\ldots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Cette suite a un nombre fini de termes, car elle s'arrêtera au terme pour lequel $a_\nu = 0$, soit à

$$(8) \qquad \nu = \frac{i-n}{2} + 1$$

si $i - n$ est pair, soit à

$$(8') \qquad \nu = \frac{i-n+1}{2}$$

si $i - n$ est impair.

En nous reportant aux formules (a) et (6), on voit que la valeur

$$Y_i = (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) u_{in}$$

sera une solution de l'équation (4); mais on aura une solution plus générale en faisant la somme de toutes les expressions semblables obtenues en supposant successivement $n = 0, 1, 2, \ldots, i$, somme que nous représenterons par

$$(9) \qquad Y_i = \sum_{n=0}^{n=i} (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) u_{in}.$$

Si nous considérons maintenant la seconde valeur (h') de p, nous aurons, en accentuant u_{in} et les coefficients a_ν pour les distinguer des précédents,

$$(i') \qquad a'_\nu = \frac{(i+n+2\nu-1)(i+n+2\nu-2)}{4(i+\nu)} a_{\nu-1},$$

d'où, en supposant $a'_0 = 1$,

$$a'_1 = \frac{(i+n)(i+n+1)}{4(i+1)},$$

$$a'_2 = \frac{(i+n)(i+n+1)(i+n+2)(i+n+3)}{4^2(i+1)(i+2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

par suite

$$(7') \qquad \begin{cases} u'_{in} = (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \Big[\mu^{-(i+n+1)} + \dfrac{(i+n)(i+n+1)}{4(i+1)} \mu^{-(i+n+3)} \\ \qquad + \dfrac{(i+n)(i+n+1)(i+n+2)(i+n+3)}{4^2(i+1)(i+2)} \mu^{-(i+n+5)} + \ldots \Big]. \end{cases}$$

Si l'on remarque que

$$\int Y_j \frac{d}{d\theta}\sin\theta \frac{dY_i}{d\theta}\,d\theta = Y\ \frac{dY_i}{d\theta}\sin\theta - \int \sin\theta \frac{dY_i}{d\theta}\frac{dY_j}{d\theta}\,d\theta,$$

$$\int Y_i \frac{d}{d\theta}\sin\theta \frac{dY_j}{d\theta}\,d\theta = Y_i \frac{dY_j}{d\theta}\sin\theta - \int \sin\theta \frac{dY_j}{d\theta}\frac{dY_i}{d\theta}\,d\theta,$$

on voit que, entre $\theta = 0$, $\theta = \pi$, la seconde et la troisième intégrale de l'équation ci-dessus donnent un résultat nul.

La quatrième intégrale ou

$$\int_0^\pi \left(Y_j \frac{dY_i}{d\psi} - Y_i \frac{dY_j}{d\psi}\right)_0^{2\pi} d\theta$$

est également nulle, parce que, d'après la forme de Y_i et Y_j, la fonction

$$Y_j \frac{dY_i}{d\psi} - Y_i \frac{dY_j}{d\psi}$$

prend la même valeur pour $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$. D'où il suit que l'on a

$$[i(i+1) - j(j+1)] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_i Y_j \sin\theta\, d\psi = 0.$$

Si donc j est différent de i, on aura

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} Y_i Y_j \sin\theta\, d\psi = 0,$$

ou

$$(10) \qquad \int_1^{-1} \int_0^{2\pi} Y_i Y_j\, d\mu\, d\psi = 0,$$

résultat remarquable qui recevra dans la suite bien des applications.

Mais l'analyse précédente ne peut pas faire connaître la valeur de

$$\int_1^{-1} \int_0^{2\pi} Y_i^2\, d\mu\, d\psi,$$

valeur que nous n'avons aucun intérêt à déterminer.

54. *Des fonctions* P_i. — Supposons que x, y, z, r, θ, ψ se rapportent à un point m, et que l'on accentue les mêmes quantités pour désigner celles qui correspondent à un autre point m'. Soit ι la distance mm'; nous aurons

$$\frac{1}{\iota} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}.$$

En considérant x', y', z' comme constants, il est facile de reconnaître que l'on a

$$(11)\qquad \frac{d^2\frac{1}{\iota}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{\iota}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{\iota}}{dz^2} = 0,$$

et, en se reportant à l'équation (1), on voit que la fonction $\frac{1}{\iota}$ est une forme particulière de la fonction V, et que par suite elle doit satisfaire à l'équation (2), c'est-à-dire à la suivante

$$(12)\qquad r\frac{d^2\frac{r}{\iota}}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{d\frac{1}{\iota}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2\frac{1}{\iota}}{d\psi^2} = 0.$$

Nous remarquerons que l'on a

$$\begin{aligned}\iota^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos mOm' \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')];\end{aligned}$$

par suite, en supposant $\frac{r}{r'} < 1$,

$$(13)\qquad \frac{1}{\iota} = \frac{1}{r'\sqrt{1 - \frac{2r}{r'}(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') + \frac{r^2}{r'^2}}}.$$

Soit

$$(14)\qquad \frac{1}{\iota} = \frac{1}{r'}\sum_{i=0}^{\infty} P_i\left(\frac{r}{r'}\right)^i$$

le développement de cette fonction suivant les puissances ascendantes de $\frac{r'}{r}$; en substituant le terme général de cette série dans l'équation (12),

on trouve

$$(15)\qquad \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dP_i}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2P_i}{d\psi^2}+i(i+1)P_i=0,$$

d'où il suit que la fonction P_i est une valeur particulière de la fonction Y_i et que l'on a notamment

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_iP_j\,d\mu\,d\psi=0,$$

si j est différent de i.

Il est évident, d'ailleurs, que P_i est également une fonction sphérique en μ', ψ' et que sa valeur reste la même quand on y change μ en μ' et ψ en ψ', et *vice versa*.

5. *Propriétés particulières de la fonction* P_i. — Posons

$$\frac{r}{r'}=\alpha,\quad p=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi'),$$

p représentant ainsi les cosinus de l'angle mOm'.

Le coefficient P_i sera le coefficient de α^i dans le développement de

$$(A)\qquad \sigma=(1-2p\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances ascendantes de α.

On déduit de là

$$(a)\qquad \frac{d\sigma}{d\alpha}=\frac{p-\alpha}{(1-2p\alpha+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(b)\qquad \frac{d\sigma}{dp}=\frac{\alpha}{(1-2p\alpha+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$(c)\qquad \alpha\frac{d\sigma}{d\alpha}=(p-\alpha)\frac{d\sigma}{dp}.$$

En substituant dans cette équation le développement

$$(d)\qquad \sigma=\sum_{0}^{\infty}\alpha^iP_i,$$

et identifiant les coefficients de α^i, on trouve

$$(e) \qquad i\mathrm{P}_i = p\frac{d\mathrm{P}_i}{dp} - \frac{d\mathrm{P}_{i-1}}{dp}.$$

De l'équation (b) on déduit successivement

$$\frac{\alpha}{(1-2p\alpha+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \Sigma\alpha^i\frac{d\mathrm{P}^i}{dp},$$

$$\alpha\Sigma\alpha^i\mathrm{P}_i = (1-2p\alpha+\alpha^2)\Sigma\alpha^i\frac{d\mathrm{P}_i}{dp},$$

d'où, en identifiant les coefficients de α^{i+1},

$$(f) \qquad \mathrm{P}_i = \frac{d\mathrm{P}_{i+1}}{dp} - 2p\frac{d\mathrm{P}_i}{dp} + \frac{d\mathrm{P}_{i-1}}{dp}.$$

Si l'on élimine $\frac{d\mathrm{P}_i}{dp}$ entre les équations (a) et (e), on trouve

$$(g) \qquad \frac{d\mathrm{P}_{i+1}}{dp} = \frac{d\mathrm{P}_{i-1}}{dp} + (2i+1)\mathrm{P}_i$$

d'où

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{P}_{i-1}}{dp} = \dfrac{d\mathrm{P}_{i-3}}{dp} + (2i-3)\mathrm{P}_{i-2}, \\ \dfrac{d\mathrm{P}_{i-3}}{dp} = \dfrac{d\mathrm{P}_{i-5}}{dp} + (2i-7)\mathrm{P}_{i-4}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si i est impair, ces équations s'arrêteront à celle qui correspond à $i=1$; on en déduit alors

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{d\mathrm{P}_{i+1}}{dp} = (2i+1)\mathrm{P}_i + (2i-3)\mathrm{P}_{i-2} + (2i-7)\mathrm{P}_{i-4} + \ldots + 3\mathrm{P}_1.$$

Dans le cas où i est pair, la dernière des équations (C) correspondra à $i=2$, et comme, d'après la formule (g), on a $\frac{d\mathrm{P}_1}{dp} = \mathrm{P}_0 = 1$, il vient

$$(\mathrm{D}') \qquad \frac{d\mathrm{P}_{i+1}}{dp} = (2i+1)\mathrm{P}_i + (2i-3)\mathrm{P}_{i-2} + (2i-7)\mathrm{P}_{i-4} + \ldots + 5\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_0.$$

Plaçons-nous dans les conditions de l'équation (D); $i-1$ est pair et

en remplaçant i par $i-1$ dans l'équation (D'), on trouve la suivante

$$\frac{dP_i}{dp}=(2i-1)P_{i-1}+(2i-5)P_{i-3}+\ldots+5P_2+P_0,$$

qui, ajoutée à (D), conduit à ce résultat remarquable

$$(16)\qquad \frac{dP_{i+1}}{dp}+\frac{dP_i}{dp}=P_0+3P_1+5P_2+\ldots+(2i+1)P_i.$$

Il est facile de s'assurer que l'on arrive au même résultat lorsque i est pair.

56. *Des diverses formes que peut prendre la fonction* P_i :

1° *Forme de Legendre.* — On a d'abord

$$\sigma=[1-\alpha(2p-\alpha)]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha(2p-\alpha)+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2(2p-\alpha)^2$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3(2p-\alpha)^3+\ldots.$$

En développant ensuite les termes de cette expression, on trouve pour le coefficient de α^i

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} P_i=\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots n}\Big[p^i-\frac{i(i-1)}{2(2i-1)}p^{i-2}\\ +\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4(2i-1)(2i-3)}p^{i-4}-\ldots\Big].\end{aligned}\right.$$

2° *Forme d'Olinde Rodrigues.* — Cette forme, qui est la suivante,

$$(18)\qquad P_i=\frac{1}{2^i.1.2.3\ldots i}\frac{d^i(p^2-1)^i}{dp^i},$$

a été déduite de celle de Legendre. Mais on y arrive plus rapidement en partant de la formule de Lagrange. Nous déduirons le développement de σ de celui de son intégrale par rapport à p, ou de

$$z=\int\sigma\,dp=-\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-2p\alpha+\alpha^2}+1,$$

en prenant égale à l'unité la constante introduite par l'intégration. Cette équation donne la suivante

$$z=p+\frac{\alpha}{2}(z^2-1);$$

d'où, en appliquant la formule de Lagrange [1],

$$z = p + \frac{\alpha}{2}(p^2-1) + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{1}{1.2} \frac{d(p^2-1)^2}{dp} + \dots + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^i \frac{1}{1.2.3\dots i} \frac{d^{i-1}(p^2-1)^i}{dp^{i-1}},$$

par suite

$$\sigma = 1 + \frac{\alpha}{2}\frac{d(p^2-1)}{dp} + \frac{\alpha^2}{2^2.1.2}\frac{d^2(p^2-1)}{dp^2} + \dots + \frac{\alpha^i}{2^i.1.2.3\dots i}\frac{d^i(p^2-1)^i}{dp^i} + \dots$$

et enfin

$$P_i = \frac{1}{2^i.1.2.3\dots i}\frac{d^i(p^2-1)^i}{dp_i},$$

ce qu'il fallait établir.

3° *Représentation de la fonction* P_i *par une intégrale définie.* — Considérons d'abord l'intégrale

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{A + B\sqrt{-1}\cos\omega},$$

dans laquelle A et B sont deux constantes réelles.

On voit que

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{(A + B\sqrt{-1}\cos\omega)\,d\omega}{A^2+B^2} = A\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A^2+B^2\cos^2\omega} = 4A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{A^2+B^2\cos^2\omega}$$
$$= 4A\int_0^{\infty}\frac{d\tang\omega}{A^2\tang^2\omega + A^2+B^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Nous avons donc

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A+B\sqrt{-1}\cos\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

---

[1] $z = p + \alpha\varphi(z) = p + \alpha\varphi(p) + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d\varphi(p)^2}{dp} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{d^2\varphi(p)^3}{dp^2} + \dots + \frac{\alpha^i}{1.2.3\dots i}\frac{d^{i-1}\varphi(p)^i}{dp^{i-1}} + \dots$

Si nous posons

$$A = 1 - \alpha \cos\varphi, \quad B = \alpha \sin\varphi, \quad p = \cos\varphi,$$

nous aurons

$$(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - \alpha(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\cos\omega)}.$$

En développant suivant les puissances de α le premier membre de cette équation et la fonction de l'intégrale, et identifiant les coefficients de α^i, on trouve

(19)
$$\left\{\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\cos\omega)^i\, d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\cos\omega)^i\, d\omega, \end{aligned}\right.$$

qui est l'expression cherchée, et d'où l'on déduit d'abord $P_i = (\pm 1)^i$ pour $\cos\varphi = \pm 1$.

Lorsque $\cos^2\varphi$ est inférieur à l'unité, P_i tend vers zéro quand i croît indéfiniment. En effet, de l'interprétation géométrique ordinaire des imaginaires on déduit facilement que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties; d'où résulte que le module de P_i est inférieur à l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\omega)^{\frac{i}{2}}\, d\omega,$$

dont tous les éléments tendent vers zéro quand i croît indéfiniment.

Lejeune-Dirichlet a donné une autre expression de P_i au moyen d'une intégrale définie. Mais, comme elle ne peut être pour nous d'aucune utilité, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

57. *Réduction d'une intégrale triple étendue à un volume fini, à une intégrale relative à la surface de ce volume* [1]. — Soit l'intégrale

(20)
$$U = \iiint \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz,$$

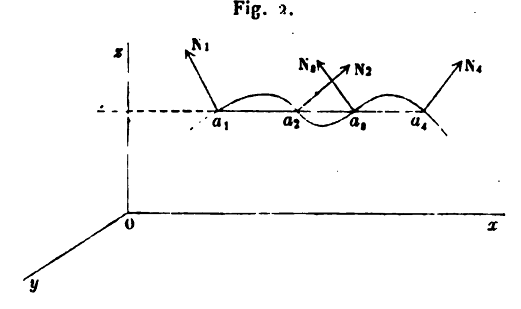
---

[1] A notre connaissance, la première trace de cette transformation se trouve dans le premier Mémoire de Poisson sur le magnétisme (*Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1822).

étendue à un volume déterminé, dans laquelle F représente une fonction continue des trois coordonnées.

Considérons au point ($x = 0$, y, z) un élément superficiel $dy\,dz$ que nous prendrons pour base d'un prisme élémentaire parallèle à Ox. Soient (*fig.* 2), à partir du plan yOz, et en se dirigeant dans le sens positif

Fig. 2.



de Ox, a_1, a_2, ..., les intersections successives d'une arête du prisme élémentaire avec la surface du volume; α_i l'angle que forme avec Ox la normale extérieure $a_i N_i$ à cette surface au point a_i; $d\omega_i$ l'élément superficiel correspondant; F_i la valeur de F qui correspond au point a_i; on a, en intégrant par rapport à x,

$$U = \int\int dy\,dz(-F_1 + F_2 - F_3 + \ldots).$$

Or

$$dy\,dz = -d\omega_1 \cos\alpha_1 = d\omega_2 \cos\alpha_2 = -d\omega_3 \cos\alpha_3 \ldots,$$

par suite

$$U = \int (F_1 \cos\alpha_1\, d\omega_1 + F_2 \cos\alpha_2\, d\omega_2 + \ldots),$$

ce qui revient à

$$(21) \qquad U = \int F \cos\alpha\, d\omega,$$

en désignant par $d\omega$ un élément quelconque de la surface et par α l'angle que forme sa normale extérieure avec Ox. Telle est la formule qu'il s'agissait d'établir.

58. *Formules de George Green.* — Soient

(Ω) une surface fermée ;

(S) l'espace qu'elle comprend ;

$d\omega$ un élément de la surface au point a dont les coordonnées sont x, y, z ;

α, β, γ les angles formés par la normale extérieure en a avec Ox, Oy, Oz ;

U, V deux fonctions quelconques de x, y, z assujetties seulement à la condition de rester finies, ainsi que leurs dérivées dans l'espace (S) ;

$$\int\int\int \mathrm{U}\left(\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right)dx\,dy\,dz \tag{22}$$

une intégrale étendue à tout cet espace, et que nous nous proposons de mettre sous une autre forme.

En intégrant par parties par rapport à x, on voit que l'on a

$$\begin{aligned}&\int\int\int \mathrm{U}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\,dx\,dy\,dz\\ &\quad=\int\int\int dx\,dy\,dz\,\frac{d\,\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}}{dx}-\int\int\int\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Or, d'après le numéro précédent, la première intégrale de cette expression est équivalente à la suivante,

$$\int \mathrm{U}\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\cos\alpha\,d\omega.$$

Dès lors, il doit paraître évident que l'expression (22) prend la forme suivante,

$$\left\{\begin{aligned}&\int\int\int \mathrm{U}\left(\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz\\ &\quad=\int \mathrm{U}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\cos\alpha+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\cos\beta+\frac{d\mathrm{V}}{dz}\cos\gamma\right)d\omega\\ &\qquad-\int\int\int\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}+\frac{d\mathrm{U}}{dy}\,\frac{d\mathrm{V}}{dy}+\frac{d\mathrm{U}}{dz}\,\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right. \tag{23}$$

cevons une sphère d'un rayon infiniment petit ε ayant son centre entre A. L'équation (23) s'appliquera évidemment à la portion du volume extérieure à la sphère.

Comme on a identiquement

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}=0,$$

l'intégrale

$$\int V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)du$$

peut être étendue au volume total.

Il en est de même de l'intégrale

$$\int U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)du;$$

car, en prenant $du=4\pi r^2\,dr$, la portion de cette intégrale qui se rapporte à la sphère est

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)\int\frac{du}{r}=\left(\frac{d^2V}{dx^2}-\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)\frac{4\pi}{3}\varepsilon^2,$$

et, par suite, négligeable.

L'intégrale

$$\int U\frac{dV}{dn}\,d\omega,$$

qui se rapporte à la surface de la sphère, est aussi négligeable, car elle est égale à

$$\frac{dV}{dn}\,\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}=4\pi\varepsilon\frac{dV}{dn},$$

et par suite du premier ordre.

Il nous reste donc à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int V\frac{dU}{dn}\,d\omega$$

étendue à la surface de la sphère. Soit V_A la valeur V au point A;

comme nous avons, en remarquant que dn est intérieur à la sphère,

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{d\frac{1}{\iota}}{d\iota} = \frac{1}{\iota^2},$$

cette expression est égale à $\frac{1}{\varepsilon^2}$ à la surface, et l'intégrale ci-dessus se réduit à

$$\frac{V_A}{\varepsilon^2}\int d\omega = 4\pi V_A.$$

Nous avons donc enfin

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\int U\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right)du - \int U\frac{dV}{dn}d\omega \\ &\quad = \int V\left(\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right)du - \int V\frac{dU}{dn}d\omega - 4\pi V_A. \end{aligned}\right.$$

Supposons que dans tout l'intérieur du volume on fasse $U = \frac{1}{\iota}$. D'après ce que l'on vient de voir, en ayant égard à l'équation (1) du n° **51**, à laquelle satisfait $\frac{1}{\iota}$, on aura

$$(28)\quad \int \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right)du + \int\left(V\frac{d\frac{1}{\iota}}{dn} - \frac{1}{\iota}\frac{dV}{dn}\right)d\omega = -4\pi V_A.$$

59. *Propriétés des fonctions* Y_i *et* P_i. — Considérons une sphère dont O est le centre et R le rayon; un point déterminé A de son intérieur; r', θ', ψ' les coordonnées polaires de ce point; r, θ, ψ celles d'un point quelconque m de l'intérieur de la sphère; ι la distance Am.

En supposant

$$V = r^i Y_i, \quad U = \frac{1}{\iota},$$

l'équation (28) recevra son application.

Nous aurons d'abord

$$V_A = r'^i Y'_i,$$

Y'_i étant la valeur que prend Y_i lorsqu'on y remplace θ par θ' et ψ par ψ'. Nous pouvons d'ailleurs prendre $d\omega = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi$. Nous avons $dn = dR$, et pour un point de la sphère

$$V = R^i Y_i, \quad \frac{dV}{dR} = i R^{i-1} Y_i.$$

L'équation (28) devient ainsi, en se rappelant que V vérifie l'équation (1) du n° **51**,

$$R^2 \int\int Y_i \left(\frac{iR^{i-1}}{\iota} - R^i \frac{d\frac{1}{\iota}}{dR} \right) \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 4\pi r'^i Y'_i.$$

D'après la formule (14), nous avons pour un point de la sphère

$$\frac{1}{\iota} = \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{\infty} P_j \frac{r'^j}{R^j}, \quad \frac{d\frac{1}{\iota}}{dR} = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1) P_j r'^j}{R^{j+2}},$$

et, en substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$R^i \int\int Y_i \left[i \sum \frac{r'^j P_j}{R^j} + \sum \frac{(j+1) r'^j P_j}{R^j} \right] \sin\theta \, d\theta \, d\psi - 4\pi r'^i Y'_i = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu quel que soit r', il faut que le coefficient de chaque puissance de cette quantité soit nul. On trouve ainsi

$$\int\int Y_i P_i \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{4\pi Y'_i}{2i+1}, \tag{29}$$

$$\int\int Y_i P_j \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 0. \tag{30}$$

Nous avons déjà écrit la dernière de ces formules. Quant à la première, on peut la mettre sous la forme suivante,

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} Y_i P_i \, d\mu \, d\psi = \frac{4\pi Y'_i}{2i+1}, \tag{30'}$$

qui lui a été donnée par Laplace.

60. *Développement d'une fonction de deux variables au moyen de fonctions sphériques.* — Toute fonction de deux variables peut être représentée par une expression de la forme $F(\theta, \psi)$, dans laquelle nous attribuerons à θ et ψ les mêmes significations que ci-dessus. Laplace a été conduit plutôt par une induction que par une démonstration à poser en principe que la fonction peut être représentée par une suite de fonctions sphériques ([1]). Soit donc

$$(A) \qquad F(\theta, \psi) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i.$$

Il suffit de démontrer que l'on peut déterminer les Y de manière que la série du second membre de cette équation représente bien la fonction du premier membre.

Multiplions l'équation (A) par $P_i \sin\theta \, d\theta \, d\psi$, et intégrons entre les limites $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $\psi = 0$, $\psi = 2\pi$; nous obtiendrons, en nous reportant aux formules (29) et (30) du numéro précédent,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \psi) P_i \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{4\pi}{2i+1} Y'_i,$$

ou, comme P_i est symétrique en θ et θ' et ψ et ψ',

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta', \psi') P_i \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = \frac{4\pi}{2i+1} Y_i.$$

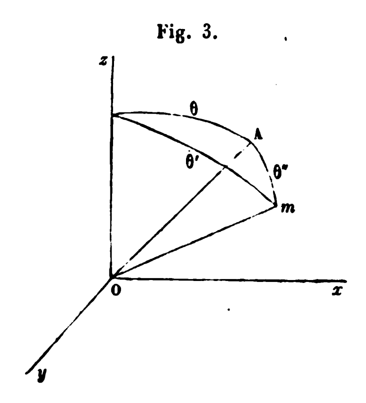
Nous aurons donc, comme expression de la série du second membre de l'équation (A),

$$(B) \qquad S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_i F(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'.$$

([1]) Poisson d'abord, puis MM. Lejeune-Dirichlet, Bonnet, etc., sont parvenus à établir directement ce théorème avec toute la rigueur possible. La théorie du premier de ces auteurs a été quelque peu critiquée; il n'en est pas de même de celle des autres. Nous donnons ici la démonstration de M. Darboux, qui est, suivant nous, la plus claire et la plus simple.

Concevons (*fig.* 3) une sphère d'un rayon égal à l'unité ayant pour centre l'origine O; soient A et m les points de cette sphère correspondant respectivement aux coordonnées θ, ψ et θ', ψ'. Nous savons que P_i pour le point m ne dépend que du cosinus de l'angle mOA, et qu'il est ainsi indépendant de l'orientation des axes coordonnés. Il nous est donc

Fig. 3.



permis de faire un changement de coordonnées et de prendre la direction OA pour celle du nouvel axe Oz; nous désignerons par θ'' et ψ'' les équivalents de θ' et ψ' pour les nouveaux axes; P_i ne dépendra plus que de $\cos\theta''$, et nous aurons d'abord

$$(C) \qquad \cos\theta'' = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi'),$$

puis, au lieu de la formule (B),

$$(B') \qquad S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_i F(\theta'', \psi'') \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi''.$$

En posant

$$(D) \qquad \int_0^{2\pi} F(\theta'', \psi'') \, d\psi'' = 2\pi f(\cos\theta''),$$

il vient

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_i F(\theta'', \psi'') \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi'' = 2\pi \int_0^{\pi} P_i f(\cos\theta'') \sin\theta'' \, d\theta'',$$

intégrale qui peut se mettre sous la forme

$$\text{(E)} \qquad 2\pi \int_{-1}^{\pi} P_i f(p)\, dp,$$

en posant $p = \cos\theta''$, en se rappelant que P_i ne dépend que de p.

La série (B') peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\text{(B'')} \qquad S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(p)\, dp\,[P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \ldots (2i+1)P_i],$$

en s'arrêtant au terme dont l'indice est i.

Mais, si l'on se reporte à la formule (16) du n° **55**, on voit que cette formule revient à la suivante

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(p)\, dp \left(\frac{dP_i}{dp} + \frac{dP_{i+1}}{dp}\right),$$

d'où, en intégrant par parties,

$$S = \frac{1}{2}[f(p)(P_i + P_{i+1})]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(P_i + P_{i+1}) f'(p)\, dp.$$

Or, nous avons

$$P_i = 1, \quad P_{i+1} = 1 \quad \text{pour } p = 1,$$
$$P_i = (-1)^i, \quad P_{i+1} = (-1)^{i+1} \quad \text{pour } p = -1.$$

De plus (56), P_i, P_{i+1} tendent vers zéro quand i croît indéfiniment; nous avons donc, comme limite,

$$S = f(1),$$

ou, en se reportant à la formule (D),

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta'', \psi'')\, d\psi'' \quad \text{pour } \theta'' = 0.$$

Mais pour $\theta'' = 0$, le point m vient se placer en A, et alors la fonction

$F(\theta'', \psi'')$ devient $F(\theta, \psi)$ et est indépendante de ψ''; par suite,

$$S = F(\theta, \psi).$$

Donc la série S représente bien la fonction $F(\theta, \psi)$, ce qu'il fallait établir.

61. *Expression d'une fonction d'une seule variable au moyen de fonctions sphériques.* — Soient

θ la variable;
$F(\cos\theta) = F(\mu)$ la fonction à développer;
X_i ce que devient la fonction Y_i quand on la suppose indépendante de ψ.

En mettant en évidence la constante arbitraire qui entre en facteur dans X_i, nous pourrons poser, d'après le numéro précédent,

$$\text{(A)} \qquad F(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i X_i.$$

Au lieu de l'équation (4) du n° **51**, nous aurons la suivante,

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dX_i}{d\mu} + i(i+1)X_i = 0,$$

dont la solution sera donnée par la formule (7) du n° **52**, en y faisant $n = 0$, soit

$$\text{(C)} \qquad X_i = \mu^i - \frac{i(i-1)}{4(i+1)}\mu^{i-2} + \frac{i(i-1)(i+2)(i-3)\mu^{i-4}}{2.4(2i-1)(2i-3)} \quad (^1).$$

---

(1) L'équation (B) est encore satisfaite par l'expression (7') du même numéro **52**, en y supposant $n = 0$, savoir

$$u'_i = \mu^{-(i+1)} + \frac{i(i+1)}{4(i+1)}\mu^{-(i+3)} + \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{4^2(i+1)(i+2)}\mu^{-(i+5)} + \ldots.$$

En ajoutant cette expression multipliée par une constante arbitraire à l'expres-

§ V.

DU MOUVEMENT VARIÉ DE LA CHALEUR DANS UNE SPHÈRE DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL. — APPLICATION A LA CHALEUR CENTRALE DU GLOBE.

62. Supposons qu'une sphère homogène soit placée dans un milieu; que, à un instant déterminé pris pour origine du temps, la répartition de la température extérieure ait lieu suivant une loi donnée; enfin que la température du milieu, au contact de la surface, dépende de la position de chacun des points de cette surface. Proposons-nous de déterminer la loi du mouvement de la chaleur dans la sphère dont nous désignerons le rayon par a.

Nous avons vu (**20**) que l'équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectilignes, ou

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

est satisfaite par le produit de trois facteurs dépendant du temps, mais ne renfermant respectivement que les variables x, y et z. En partant de là, on peut se demander si l'équivalent de cette équation en coordonnées sphériques

$$(1) \qquad r\frac{d^2rV}{dr^2}+\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2}=\frac{V^2}{K^2}\frac{dV}{ut}$$

ne peut pas être aussi satisfait par le produit de trois facteurs dépendant de t, mais dans lesquels il n'entre respectivement que l'une des variables r, μ, ψ.

Posons d'abord

$$(2) \qquad rV=U,$$

l'équation précédente devient

$$(3) \qquad r^2\left(\frac{d^2U}{dr^2}-\frac{1}{K^2}\frac{dU}{dt}\right)+\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dU}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2U}{d\psi^2}=0.$$

Soit maintenant

$$(4) \qquad V = \rho Y e^{-m^2 \frac{K^2}{a^2} t},$$

m étant une constante, ρ une fonction de r, et Y une fonction de μ et ψ. En substituant cette expression dans l'équation (3), on trouve

$$(5) \qquad \frac{r^2}{\rho}\left(\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{m^2}{a^2}\rho\right) + \frac{1}{Y}\left[\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2Y}{d\psi^2}\right] = 0.$$

En désignant par i un nombre entier positif quelconque, posons

$$\frac{r^2}{\rho}\left(\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{m^2}{a^2}\rho^2\right) = i(i+1),$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{d^2\rho}{dr^2} + \left[\frac{m^2}{a^2} - \frac{i(i+1)}{r^2}\right]\rho = 0.$$

L'équation (5) devient, en affectant Y de l'indice i,

$$(7) \qquad \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_i}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2Y_i}{d\psi^2} + i(i+1)Y_i = 0,$$

équation connue dont nous n'avons pas à nous occuper quant à présent.

63. Il nous reste à intégrer l'équation (6) ou du moins à y satisfaire en vue du problème proposé.

Supposons que ρ soit développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de r à partir de l'une de ces puissances dont nous déterminerons ultérieurement l'exposant. Désignons par ν un nombre entier positif quelconque et par ζ_ν une constante.

Posons

$$(8) \qquad \rho = \Sigma \zeta_\nu r^\nu.$$

En substituant cette expression dans l'équation (6) et égalant à zéro

le coefficient de $r^{\nu-2}$, on trouve

$$(9) \qquad \zeta_\nu = -\frac{m^2 \zeta_{\nu-2}}{(\nu - i - 1)(\nu + 1)}.$$

Pour que ζ_ν ne devienne pas infini, nous ne ferons commencer la série qu'à partir de $\nu = i$, et, en prenant $\zeta_i = 1$, nous aurons successivement

$$\zeta_{i+2} = -\frac{m^2}{1(i+3)},$$

$$\zeta_{i+4} = \frac{m^4}{1.3(i+3)(i+5)},$$

$$\zeta_{i+6} = -\frac{m^6}{1.3.5(i+3)(i+5)(i+7)},$$

. . . .

Nous avons donc, comme intégrale particulière de l'équation (6),

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho = r^i \Big[1 - \frac{m^2 r^2}{1(i+3)} &+ \frac{m^4 r^4}{1.3(i+3)(i+5)} \\ &- \frac{m^6 r^6}{1.3.5(i+3)(i+5)(i+7)} + \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

Nous obtiendrons une seconde intégrale particulière de la même équation, en supposant que ρ soit développé suivant les puissances négatives de r. En changeant ν en $-\nu$ dans l'équation (9), on trouve

$$\zeta_{-\nu-2} = -\frac{(\nu + i - 1)(\nu - 1)\zeta_{-\nu}}{m^2}.$$

La série ne devra commencer qu'à partir de $\nu = 1$, et, en prenant $\zeta_{-1} = 1$, on trouve

$$\zeta_{-3} = -\frac{2(i+2)}{m^2},$$

$$\zeta_{-5} = \frac{2.4(i+2)(i+4)}{m^4},$$

. . . .

d'où, pour la seconde solution cherchée,

$$(10') \qquad \rho = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{2(i+2)}{m^2 r^2} + \frac{2.4(i+2)(i+4)}{m^4 r^4} - \ldots\right].$$

En ajoutant les expressions (10) et (10′) après les avoir multipliées par des constantes arbitraires, on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (6). Mais nous n'avons pas à tenir compte de la solution (10′), parce qu'elle devient infinie pour $r = 0$.

64. On peut mettre l'intégrale de l'équation (6) sous une autre forme qui nous sera plus avantageuse en ce qui concerne la condition relative à la surface de la sphère.

Si nous posons

$$\rho = ur^{-i}, \tag{11}$$

l'équation précitée devient

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2i}{r}\frac{du}{dr} + \frac{m^2}{a^2}u = 0, \tag{12}$$

équation dont nous avons donné l'intégrale sous différentes formes aux n^os^ **26** et suivants.

Nous aurons notamment pour l'intégrale particulière, qui ne devient pas infinie pour $r = 0$,

$$u = Br^{1+2i}\int_0^\pi \cos\left(m\frac{r}{a}\cos\theta\right)\sin^{2i+1}\theta\,d\theta,$$

par suite

$$\rho = \left(\frac{r}{a}\right)^{1+i}\int_0^\pi \cos\left(m\frac{r}{a}\cos\theta\right)\sin^{2i+1}\theta\,d\theta. \tag{13}$$

En prenant la constante égale à $\frac{1}{a^{1+i}}$, Legendre est arrivé à représenter ρ par la somme de deux termes proportionnels à $\cos(mr+\varepsilon)$ et à $\sin(mr+\varepsilon)$, ε étant une constante. Poisson, en s'inspirant de l'idée de Legendre, est parvenu à une autre expression qui se prête beaucoup mieux au calcul relativement à la condition à la surface, et que nous allons faire connaître.

Désignant par ν un nombre entier positif, cherchons à satisfaire à

l'équation (12), par une suite de la forme

$$u = e^{m\sqrt{-1}\frac{r}{a}} \sum_{\nu=0} A_\nu r^\nu.$$

En substituant et égalant à zéro le coefficient de $r^{\nu-1}$, on trouve

$$(\nu+1)(2i-\nu)A_{\nu+1} + 2\frac{m}{a}\sqrt{-1}\,(i-\nu)A_\nu = 0.$$

Nous avons donc l'intégrale particulière

$$u_1 = A_0 e^{m\frac{r}{a}\sqrt{-1}} \left[1 + \sum_{\nu=1} \left(2\frac{m}{a}\sqrt{-1}\right)^\nu \frac{(-1)^\nu i(i-1)(i-2)\ldots(i-\nu+1)r^\nu}{1.2.3\ldots\nu.2i(2i-1)\ldots(2i-\nu+1)}\right];$$

cette suite est limitée et comprend $i+1$ termes.

En remplaçant dans la formule précédente $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, A_0 par A'_0, nous aurons cette seconde intégrale particulière

$$u_2 = A'_0 e^{-m\frac{r}{a}\sqrt{-1}} \left[1 + \sum_{\nu=1} \left(2\frac{m}{a}\sqrt{-1}\right)^\nu \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-\nu+1)r^\nu}{1.2.3\ldots\nu.2i(2i-1)\ldots(2i-\nu+1)}\right].$$

La somme de $u_1 + u_2$ ou

$$\begin{aligned} u = {} & A_0 e^{m\frac{r}{a}\sqrt{-1}} + A'_0 e^{-m\frac{r}{a}\sqrt{-1}} \\ & + \sum_{\nu=1} (2m\sqrt{-1})^\nu \left[A_0(-1)^\nu e^{m\frac{r}{a}\sqrt{-1}} \right. \\ & \qquad \left. + A'_0 e^{-m\frac{r}{a}\sqrt{-1}}\right] \frac{i(i-1)\ldots(i-\nu+1)r^\nu}{1.2\ldots\nu.2i(2i-1)\ldots(2i-\nu+1)} \end{aligned}$$

sera l'intégrale générale de l'équation (12).

Remplaçons maintenant les exponentielles imaginaires par leurs ex-

pressions trigonométriques et posons

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{2^2 m^2 i(i-1)\frac{r^2}{a^2}}{1.2.2i(2i-1)} + \frac{2^4 m^4 i(i-1)(i-2)(i-3)\frac{r^4}{a^4}}{1.2.3.4.2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)} - \ldots, \\ X' &= \frac{2mi\frac{r}{a}}{1.2i} - \frac{2^3 m^3 i(i-1)(i-2)\frac{r^3}{a^3}}{1.2.3.2i(2i-1)(2i-2)} \\ &\quad + \frac{2^5 m^5 i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)\frac{r^5}{a^5}}{1.2.3.4.5.2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)(2i-4)} - \ldots. \end{aligned}\right.$$

Désignons par C et C′ deux constantes arbitraires substituées à A_0, A'_0 dont elles dépendent, nous aurons

$$u = C\left(X\sin m\frac{r}{a} - X'\cos m\frac{r}{a}\right) + C'\left(X\cos m\frac{r}{a} + X'\sin m\frac{r}{a}\right),$$

et enfin

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned} \rho &= Cr^{-i}\left(X\sin m\frac{r}{a} - X'\cos m\frac{r}{a}\right) \\ &\quad + C'r^{-i}\left(X\cos m\frac{r}{a} + X'\sin m\frac{r}{a}\right). \end{aligned}\right.$$

Pour de très petites valeurs de r, le second terme de cette expression se réduit sensiblement à $C'r^{-i}$ qui, devient infini pour $r = 0$. Il faut donc que C′ soit nul, et alors nous aurons simplement

$$(16')\qquad \rho = r^{-i}\left(X\sin m\frac{r}{a} - X'\cos m\frac{r}{a}\right),$$

en supposant $C = 1$, ce qui est permis, attendu que ce coefficient ne ferait que multiplier les deux constantes arbitraires que renferme Y_i.

L'équation (1) sera donc satisfaite par

$$(17)\qquad V = \frac{\rho}{r}Y_i e^{-m^2\frac{k^2}{a^2}t} = RY_i e^{-m^2\frac{k^2}{a^2}t},$$

en posant

$$(18)\qquad R = \frac{\rho}{r}.$$

16. *Condition relative à la surface.* — Soit V′ la température du milieu au contact de la sphère qui peut varier avec μ, ψ et t. La condition dont il s'agit est la suivante

$$\frac{dV}{dr} + \frac{1}{n}(V - V') = 0 \quad \text{pour } r = a. \tag{19}$$

Les formules (1) et (19) étant linéaires, V se compose de deux parties, l'une dépendant de V′ ou des causes échauffantes ou refroidissantes de l'extérieur, l'autre qui en est indépendante et qui résulte uniquement de la manière dont la chaleur a été primitivement dans la sphère.

66. *Partie de la température dépendant de l'état initial.* — Nous devons ici substituer à la condition (19) la suivante

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour } r = a, \tag{19'}$$

qui correspond à l'hypothèse d'une température extérieure constante, V représentant l'excès de la température sur cette constante.

En substituant l'expression (17) dans cette condition, on trouve,

$$\frac{d\rho}{dr} + \rho\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a}\right) = 0 \quad \text{pour } r = a, \tag{20}$$

ou, en vertu de l'équation (16′),

$$\left\{\begin{aligned} &\cos m\left[\frac{mX_a}{a} - X'_a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a}\right) - a^i\left(\frac{dX_a r^{-i}}{dr}\right)_a\right] \\ &\quad + \sin m\left[\frac{mX'_a}{a} + X_a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a}\right) + a^i\left(\frac{dX r^{-i}}{dr}\right)_a\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Cette équation fera connaître les valeurs en nombre infini que l'on peut attribuer à m.

Dorénavant nous désignerons par ρ_{im}, R_{im} les valeurs de ρ, R qui correspondent au nombre i et à la racine m de l'équation (21).

A la solution

$$V = R_{im} Y_i e^{-m^2 \frac{k^2}{a^2} t}$$

68. *Détermination des fonctions sphériques dont dépend la température, dues à l'état initial.*

Soit $F(\nu, \mu, \psi)$ la fonction donnée qui représente la température initiale. Nous avons

$$(25)\qquad F(r, \mu, \psi) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i \Sigma R_{im}.$$

De cette équation on déduit d'abord (**59**)

$$\int_{-1}^{1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} F(r, \mu', \psi') P_i \, d\psi' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1} \Sigma R_{im},$$

puis

$$(26)\qquad \int_{0}^{a} r^2 R_{im} \, dr \int_{-1}^{1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} F(r, \mu', \psi') P_i \, d\psi' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1} \int_{0}^{a} (r R_{im})^2 \, dr.$$

Soit

$$(27)\qquad F(r, \mu, \psi) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i$$

le développement de F en série de fonctions sphériques, lesquelles dépendent de r.

L'équation (26) se transforme dans la suivante

$$\int_{0}^{a} r^2 R_{im} Z_i \, dr = Y_i \int_{0}^{a} (r R_{im})^2 \, dr,$$

d'où

$$(28)\qquad Y_i = \frac{\int_{0}^{a} r^2 R_{im} Z_i \, dr}{\int_{0}^{a} (r R_{im})^2 \, dr},$$

et le problème proposé se trouve ainsi résolu.

On remarquera que Y_i doit nécessairement être indépendant du choix de la racine m de l'équation (21).

69. *Température finale de la sphère.* — L'équation (21) a une racine

nulle, comme on le reconnaît immédiatement d'ailleurs en portant la valeur (13) dans la condition (20). Cette racine correspond à l'état d'équilibre de température. Dans ce cas, l'équation (12) se réduit à

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2i}{r^2}\frac{du}{dr} = 0.$$

L'intégrale particulière de cette équation, qui ne devient pas infinie pour $r = 0$, est, en désignant par C_i une constante,

$$u = C_i r^{2i+1},$$

d'où

$$\rho_i = C_i r^{i+1},$$

$$R_i = C_i r^i.$$

Or la valeur de ρ_i ne peut satisfaire à la condition (20) que si $C_i = 0$. Donc l'état initial de la chaleur de la sphère n'a aucune influence sur sa température finale, qui ne dépend dès lors que de la partie de la température extérieure V', laquelle est indépendante du temps. Soit

$$V' = \sum_{i=0}^{\infty} Y'_i$$

le développement de cette partie en fonctions sphériques. Comme nous avons ici pour l'expression de la température stationnaire

$$V_f = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i C_i r_i,$$

la condition (19) donne

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[Y_i C_i\left(i a^{i-1} + \frac{a^i}{n}\right) - \frac{Y'_i}{n}\right] = 0,$$

et il faut que chacun des termes de cette somme soit nul, ce qui exige que l'on ait

$$Y_i = Y'_i,$$

$$C_i = \frac{1}{a\left(1 + \frac{in}{a}\right)}.$$

On a donc pour l'expression de la température finale

$$(29) \qquad V_f = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^i \frac{Y_i}{1 + i\frac{in}{a}}.$$

La valeur complète de la température, abstraction faite de l'influence des termes variables de V', s'obtiendra en faisant la somme des expressions (29) et (22), en ne considérant dans la seconde que les racines m différentes de zéro.

70. *Avant-dernier état de la chaleur dans une sphère d'un grand rayon.* — L'équation (21) peut se mettre sous la forme suivante

$$(21') \qquad \begin{cases} \cos m \left\{ m\frac{X_a}{a} - X'_a\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{a}(1+i)\right] - \left(\frac{dX}{dr}\right)_a \right\} \\ + \sin m \left\{ m\frac{X'_a}{a} + X_a\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}(1+i)\right] - \left(\frac{dX}{dr}\right)_a \right\} = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose que a soit très grand, cette équation se réduit approximativement à la suivante

$$(21'') \qquad X_a \sin m - X'_a \cos m = 0.$$

En laissant de côté la solution $m = 0$, la plus petite racine de cette équation est $m = \pi$ pour $i = 0$, est comprise entre π et $\frac{3}{2}\pi$ pour $i = 1$, entre $\frac{3}{2}\pi$ et 2π pour $i = 2$, etc.

Au bout d'un temps suffisamment long, il ne restera dans l'expression (22) que l'exponentielle qui a le plus petit exposant. Or, pour $i = 0$, l'équation (21') devient

$$\sin m\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a}\right) + \frac{m}{a}\cos m = 0,$$

d'où, en ne conservant que la première puissance de $\frac{m}{a}$,

$$m = \pi\left(1 - \frac{n}{a}\right).$$

La formule (16′) donne alors

$$\rho = \sin \pi \frac{r}{a}\left(1 - \frac{n}{a}\right),$$

et l'équation (22) se réduit à

(30) $$V = G\frac{a}{r}\sin\pi\frac{r}{a}\left(1 - \frac{n}{a}\right)e^{-\left[\pi\frac{K}{a}\left(1-\frac{n}{a}\right)\right]^2 t},$$

en représentant par G la constante Y_0. Au centre la partie variable de la température sera

$$V_0 = G\pi\left(1 - \frac{n}{a}\right)e^{-\left[\frac{K\pi}{a}\left(1-\frac{n}{a}\right)\right]^2 t}$$

et à la surface

(31) $$V_a = G\pi\frac{n}{a}e^{-\left[\frac{K\pi}{a}\left(1-\frac{n}{a}\right)\right]^2 t}.$$

Le rapport de ces deux quantités, ou

$$\frac{V_0}{V_a} = \left(1 - \frac{n}{a}\right)\frac{a}{n},$$

est donc extrêmement grand.

Désignons par

$$\Delta V = -\varepsilon\left(\frac{dV}{dr}\right)_a$$

la variation que subit la température de la sphère à une profondeur très petite ε au-dessous de la surface; en se reportant à la formule (19′), on a

(32) $$\Delta V = \frac{\varepsilon}{a}V_a,$$

et, en vertu de l'équation (31),

(32′) $$\Delta V = \frac{\varepsilon}{a}G\pi e^{-\left[\frac{K\pi}{a}\left(1-\frac{n}{a}\right)\right]^2 t}.$$

71. *Application à la chaleur centrale de la Terre.* — Nous suppose-

rons que la Terre est homogène en lui attribuant, si l'on veut, sa moyenne densité. A la surface la température moyenne, ou la portion de V′ indépendante du temps, est assez bien représentée à différentes latitudes par la formule suivante, due à M. Brewster,

$$V' = -17°78 + 45°28\sqrt{1-\mu^2},$$

c'est-à-dire par la somme de deux fonctions sphériques dont l'une est de l'ordre zéro et l'autre de l'ordre 1. Si la Terre avait atteint son état d'équilibre de chaleur, on aurait, d'après la formule (29),

$$(33) \qquad V_f = -17°78 + 45°28\frac{r}{a}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1+\frac{n}{a}},$$

et cette température finale, en raison de la grandeur du rayon terrestre, éprouverait des variations très lentes près de la surface et qui seraient insensibles dans les mines les plus profondes. L'augmentation de température observée à mesure que l'on pénètre dans l'intérieur de l'écorce terrestre, et qui est de 1° pour 33^m de profondeur, semble indiquer que notre globe n'est pas arrivé à son état final de température, et nous sommes alors conduit à étudier ce qui peut résulter de l'hypothèse où sa chaleur propre serait parvenue à son dernier état de mouvement, défini dans le numéro précédent.

Nous pourrons prendre l'époque actuelle pour origine du temps, en considérant t comme négatif ou positif, selon qu'il s'agira de temps passés ou à venir.

La formule (32′) se réduit à la suivante

$$\Delta V = \frac{\varepsilon}{a} G\pi;$$

comme on a $\Delta V_1 = 1$ pour $\varepsilon = 33^m$, on déduit de là

$$(34) \qquad G = \frac{a}{33\pi} = \frac{\pi a}{33\times\pi^2} = 61350.$$

Soient F une constante, l la longitude du Soleil, $\varepsilon = a - r$ une

En changeant de signe le radical et remplaçant A et α par d'autres constantes, on aurait deux autres intégrales, et par suite les intégrales générales des équations (35′). Mais nous ferons abstraction des deux dernières intégrales particulières, parce qu'elles dépendent d'une exponentielle dont l'exposant est positif. D'ailleurs, les deux premières (38) nous suffisent pour résoudre la question, puisque nous n'avons que deux conditions (36′). Pour déterminer les constantes, ces conditions donnent

$$(39)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{F}{\cos\alpha\left(1+\sqrt{\dfrac{l}{2}}\dfrac{n}{K}\right)+\sqrt{\dfrac{l}{2}}\dfrac{n}{K}\sin\alpha}, \\[2ex] \tang\alpha = \dfrac{\sqrt{\dfrac{l}{2}}\dfrac{n}{K}}{1+\sqrt{\dfrac{l}{2}}\dfrac{n}{K}}. \end{cases}$$

Enfin les équations (37) et (38) conduisent à

$$(40)\qquad V = A e^{-\sqrt{\frac{l}{2}}\frac{\varepsilon}{K}} \sin\left(lt - \sqrt{\frac{l}{2}}\frac{\varepsilon}{K} - \alpha\right).$$

Saussure a reconnu par l'observation que, à une profondeur de $9^{m},60$, le coefficient de la variation annuelle de V est égal à $\frac{1}{12}$ de sa valeur, ce qui donne la relation

$$e^{-\frac{9.6}{K}\sqrt{\frac{l}{2}}} = \frac{1}{12},$$

d'où

$$(41)\qquad \frac{l}{K^2} = 0,134.$$

En observant le maximum de la température annuelle à Paris, maximum qui correspond à

$$\sin(lt - \alpha) = 1, \quad \text{d'où} \quad lt = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

on a été conduit à prendre

$$(42) \qquad \operatorname{tang}\alpha = 0,6.$$

En ayant égard aux valeurs (41) et (42), la seconde des équations (39) conduit à

$$(43) \qquad n = 5,796.$$

La formule (32) donne, par suite, en y faisant $\Delta V = 1$, $\varepsilon = 33^{m}$, conformément à ce que l'on a vu plus haut,

$$(44) \qquad V_a = 0,1754.$$

Si nous prenons maintenant le siècle pour unité de temps, nous devons prendre $l = 2\pi \times 100$, et l'équation (41) donne

$$\frac{K^2\pi^2}{a^2} = \frac{11445}{10^{13}},$$

En négligeant $\frac{n}{a}$ devant l'unité, la température à la surface au bout du temps t sera donnée par la formule (31), qui devient

$$(45) \qquad V_a = 0,1754\, e^{-\frac{11445\, t}{10^{13}}}.$$

En établissant un parallèle entre les plantes dont on retrouve les traces dans les schistes houillers et certaines plantes qui croissent dans la zone torride, on a été conduit à admettre que les premières avaient dû croître dans un milieu dont la température était de 35°. La température de la Terre serait donc abaissée à la surface de 20°. En supposant donc $V_a = 20$ dans la formule (45), on trouve

$$-t = 414\,000\,000.$$

Ainsi il se serait écoulé plus de quatre cent millions de siècles depuis la période houillère jusqu'à nos jours.

THÉORIE DE L'ÉLECTROSTATIQUE.

§ I. — Généralités.

1. Dans l'exposé suivant, nous n'avons aucune prétention à l'invention. Nous n'avons pour objet que de coordonner, à notre point de vue, les résultats non sujets à contestation obtenus par Poisson et ses savants successeurs, Gauss, Green, Clausius, Bertrand, etc.

Sans remonter plus haut, nous trouvons la fonction des forces dans les *Œuvres* de Laplace et de Lagrange. Plus tard Gauss désigne cette fonction sous le nom de *potentiel*, expression qui est devenue depuis d'un usage général dans l'enseignement.

L'emploi du potentiel en électrostatique est souvent entaché d'obscurité, à ce point que bien des géomètres physiciens ont prétendu que l'on y faisait une trop large part à l'arbitraire et n'ont pas, par suite, montré une grande sympathie pour ce genre de recherches. Nous nous sommes surtout attaché à faire disparaître les ambiguïtés.

Les formules de Green se manient avec la plus grande sûreté lorsqu'on y regarde d'un peu près; elles n'ont d'ailleurs d'autre objet que de conduire immédiatement à certains résultats généraux et de supprimer des combinaisons pénibles d'intégrales définies, auxquelles on est conduit en suivant la voie ordinaire tracée par la Mécanique rationnelle.

2. Pour expliquer les faits qui se rapportent à l'électricité à l'état

d'équilibre, on a recours à une hypothèse que l'on peut résumer ainsi qu'il suit :

« Lorsqu'un corps n'est pas électrisé ou qu'il se trouve à l'état naturel, dans chacune de ces molécules se trouvent concentrés deux fluides impondérables, en quantités égales censées indéfinies, qui sont à l'état de combinaison. Quoique ces deux fluides se neutralisent ou qu'ils ne produisent aucun effet physique, on est cependant convenu d'appeler *fluide neutre* leur état de combinaison. »

Pour que le corps soit électrisé, il faut qu'il y ait décomposition partielle du fluide neutre dans ses deux éléments et que, par un procédé quelconque, on ait fait disparaître un de ces éléments, ou encore que l'on ait réparti ces mêmes éléments sur deux parties distinctes du corps.

Les deux éléments du fluide neutre ont reçu respectivement les noms de *fluide positif* et de *fluide négatif*. Quoiqu'ils n'aient qu'un caractère fictifs, on suppose qu'ils jouissent des propriétés de la matière; c'est ainsi que l'on considère une molécule matérielle électrisée comme renfermant une molécule électrique, dont la masse mesure l'*intensité* de l'électricité.

En partant de là et des lois de Coulomb, on a été conduit à poser ce principe élémentaire :

Deux molécules s'attirent ou se repoussent, suivant qu'elles appartiennent aux deux électricités de signe contraire ou à la même électricité; leur action mutuelle est proportionnelle à leurs masses et varie en raison inverse du carré de leur distance.

Nous admettrons que chaque masse électrique élémentaire a une valeur algébrique et qu'elle porte avec elle le signe de l'électricité à laquelle elle appartient. Ainsi, si m est la masse d'une molécule électrique appartenant à l'électricité positive, elle devra être prise en valeur absolue; si m'_1 est la masse d'une autre molécule électrique agissant sur la précédente, elle devra être considérée comme positive ou négative selon qu'elle appartiendra à la même électricité que m ou à l'autre électricité.

En désignant par r_1 la distance des m, m'_1, nous représenterons par

$$\frac{mm'_1}{r_1^2}$$

leur action mutuelle, qui sera positive si c'est une répulsion et négative dans le cas contraire. Nous supposons ainsi que l'on prend pour unité de force électrique l'action mutuelle de deux masses électriques égales à l'unité, dont la distance est aussi égale à l'unité.

Le travail total de l'action ci-dessus, pour une variation quelconque de r_1, sera aussi

$$mm'_1 \int \frac{dr_1}{r_1^2} = -\frac{mm'_1}{r_1} + \text{const.}$$

3. *Fonction potentielle et potentiel.* — Soient

$m'_1, m'_2, \ldots, m'_i, \ldots$ les masses de molécules électriques agissant simultanément sur la masse m.

x, y, z les coordonnées du point m parallèles à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

x'_i, y'_i, z'_i les coordonnées semblables du point m'_i;

$r_i = \sqrt{(x-x'_i)^2+(y-y'_i)^2+(z-z'_i)^2}$ la distance $\overline{mm'_i}$;

X, Y, Z les composantes parallèles aux axes ci-dessus de la résultante F des actions exercées sur m par les m'_i.

Nous désignerons sous le nom de *fonction potentielle* la fonction de x, y, z définie par

$$(1) \qquad V = -\left(\frac{m'_1}{r_1} + \frac{m'_2}{r_2} + \cdots + \frac{m'_i}{r_i} + \ldots\right) = \sum -\frac{m'_i}{r_i},$$

et de *potentiel* de la masse m l'expression

$$(2) \qquad mV.$$

Le potentiel n'est autre chose, à une constante près, que le travail total de F ou des actions exercées par les m'_i sur m lorsqu'on fait varier les distances r'_i de quantités finies.

Supposons que les molécules m'_i forment une masse électrique telle qu'on puisse la considérer comme continue; soient du un élément de volume en un point quelconque m' de cette masse, ρ la densité correspondante, positive ou négative selon la nature du fluide; comme on peut prendre $m' = \rho\, du$, nous aurons, au lieu de l'équation (1), la suivante

$$V = -\int \rho \frac{du}{r}, \tag{3}$$

l'intégrale s'étendant à toute la masse fluide.

La fonction potentielle peut être étudiée indépendamment de toute idée de masse attribuée au point m ainsi réduit à l'état d'un point géométrique, point que nous désignerons sous le nom de *centre potentiel*. En faisant varier la position de ce centre, on n'obtiendra un potentiel que lorsque ce centre pénétrera dans l'intérieur de la masse fluide considérée ou dans une autre masse sur laquelle agit cette dernière.

4. *Propriétés du potentiel et de la fonction potentielle.* — Les formules relatives à l'attraction d'un corps grave sur un point matériel [1] s'appliquent évidemment ici, en y changeant le signe de V.

Nous avons d'abord

$$X = m\frac{dV}{dx}, \quad Y = m\frac{dV}{dy}, \quad Z = m\frac{dV}{dz}. \tag{4}$$

Concevons que l'on fasse subir à m un déplacement élémentaire $d\xi$ suivant une certaine direction $m\xi$ et soit F_ξ la composante de F suivant cette direction. Nous aurons, en égalant entre elles deux expressions du travail élémentaire,

$$m\, dV = F_\xi\, d\xi,$$

d'où

$$F_\xi = m\frac{dV}{d\xi}. \tag{5}$$

---

[1] *Œuvres de Laplace*, t. II, liv. III; DUHAMEL, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique* (édit. de 1845), t. II, p. 165 et suiv.; H. RESAL, *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, Ch. III.

En désignant par C une constante arbitraire, l'équation en x, y, z,

$$V = C,$$

représente une famille de surfaces dites *de niveau*.

Si m est un point de l'une de ces surfaces, et si la direction de $m\xi$ est comprise dans le plan tangent à cette surface, nous aurons, en vertu de la formule (5),

$$F_\xi = 0,$$

et l'action exercée sur m est par suite *normale* à la surface de niveau correspondante

Soit dn la portion de la normale à la surface de niveau ci-dessus, menée au point m, limitée par une autre surface de niveau qui en est infiniment voisine; nous aurons

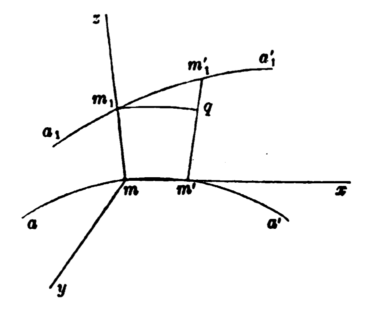
$$F = m\frac{dV}{dn} \quad (6)$$

([1]).

([1]) Il nous paraît intéressant de trouver l'expression de l'angle formé par les plans tangents en deux points correspondants de deux surfaces de niveau consécutives.

Soient (*fig.* 1) $V = C$, $V = C + dC$ les équations de ces surfaces (A) et (A_1): m_1 les points ou la normale au point m de la première rencontre la seconde ou

Fig. 1.



le point correspondant de m. Nous prendrons pour plan de la figure celui de l'une des sections principales de (A) en m, déterminant dans cette surface la courbe aa' et dans l'autre le profil $a_1a'_1$.

Portons sur aa' à partir de m la longueur infiniment petite $mm' = ds$ et dési-

Si le point m n'est pas compris dans l'intérieur de la masse fluide, la fonction potentielle satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0. \tag{7}$$

Dans le cas contraire, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=4\pi\rho, \tag{8}$$

ρ étant la densité du fluide au point intérieur m.

---

gnons par m'_1 le point correspondant de m'; menons en m_1 la parallèle à mm' jusqu'à sa rencontre q avec $m'm'_1$, nous avons, en supposant la masse m égale à l'unité,

$$dn=\overline{mm_1},$$

$$F=\frac{dC}{dn},\quad dn=\frac{dC}{F},$$

$$m'_1q=\frac{d\,dn}{ds}\,ds=dC\,\frac{d\frac{1}{F}}{ds},$$

et, en appelant i l'angle $\widehat{m'_1m_1q}$,

$$i=\frac{\overline{m'_1q}}{\overline{m_1q}}\,\frac{dC}{\overline{mm'}}\,\frac{d\frac{1}{F}}{ds}\,ds=dC\frac{d\frac{1}{F}}{ds}.$$

Si l'on distingue par un accent les valeurs de i et ds qui se rapportent à l'autre section principale, on a de même

$$i'=dC\frac{d\frac{1}{F}}{ds'}.$$

Prenons les directions de mm_1, mm' pour axes des z et des x, l'équation du plan parallèle en m au plan tangent mené au point m_1 sera

$$x\tang i+y\tang i'-z=0.$$

Le cosinus de l'angle cherché γ, que forme ce plan avec le plan xmy, sera donné par

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\tang^2 i+\tang^2 i'}},$$

d'où

$$\gamma=\sqrt{i^2+i'^2}=\frac{dC}{F^2}\sqrt{\frac{dF^2}{ds^2}+\frac{dF^2}{ds'^2}}.$$

Enfin, si le point m se trouve à la surface, on a

$$(9) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 2\pi\rho \quad (^1).$$

§ II. — De l'équilibre électrique d'un conducteur.

5. *Niveau potentiel.* — Si, à un instant quelconque, un corps conducteur possède une certaine quantité libre d'électricité, cette quantité ne subira aucune modification que si l'on se trouve dans les conditions suivantes :

1° Le corps doit être placé dans un milieu non conducteur, et qui exerce sur sa surface une pression supérieure à zéro; 2° il ne doit se trouver en contact qu'avec des corps non conducteurs; 3° il doit être suffisamment éloigné d'autres conducteurs, pour que ces derniers n'exercent sur lui aucune action appréciable.

Si l'équilibre électrique est établi, *les deux fluides restent à l'état de combinaison dans toutes les molécules matérielles du corps.*

En effet, supposons que, en un point de ce corps, le fluide neutre se trouve décomposé en ses deux éléments égaux m et m'. L'un de ces éléments étant soumis à une attraction et l'autre à une répulsion, ils se sépareraient de plus en plus, c'est-à-dire qu'il y aurait mouvement de l'électricité, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'équilibre.

Ainsi donc il ne s'exerce aucune action électrique dans le corps à partir de sa surface, c'est-à-dire que l'on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

ou, d'après les équations (4), que la fonction potentielle a une valeur constante dans tout l'intérieur du corps. Cette constante, qui joue un

---

(1) On ne donne pas généralement cette formule, mais on l'établit de la même manière que la formule (8), par la considération d'une sphère d'un rayon infiniment petit ayant son centre en m. Mais l'on voit ici que l'on ne doit considérer que la moitié du potentiel de cette sphère.

rôle important dans la théorie de l'Électrostatique, a reçu le nom de *niveau potentiel*.

L'équation (8) donne, pour l'intérieur du corps, $\rho = 0$, ce qui devait paraître évident à priori. On déduit de là que le potentiel d'un point intérieur du conducteur est nul.

D'après ce qui précède, on voit que la seule hypothèse que l'on puisse faire est de supposer que l'électricité forme une couche répandue sur la surface du corps, et que cette surface est une surface de niveau ([1]). L'épaisseur de la couche, généralement variable d'un point à un autre de la surface du corps, ne peut pas être appréciée; toutefois, on admet qu'elle est très petite.

La couche électrique n'exerçant aucune action sur le corps, réciproquement le corps, dans ses éléments, n'exerce aucune action sur la couche. D'où il suit que chaque molécule électrique de cette couche n'est soumise qu'aux forces répulsives provenant des autres parties de la même couche.

La fonction potentielle changera brusquement de valeur quand on passera d'un point de la surface à un point de la couche qui en sera aussi voisin que l'on voudra; il en sera de même lorsque l'on passera d'un point de la couche à un point de sa surface extérieure; c'est ce qui résulte des équations (8) et (9).

6. *Densité électrique superficielle. Charge électrique.* — Soient $d\omega$ un élément de la surface du corps; ε et ρ l'épaisseur et la densité correspondantes de la couche électrique; on peut prendre $du = \varepsilon d\omega$, et la formule (3) devient

$$V = -\int \rho\varepsilon \frac{d\omega}{r}.$$

Mais, comme il est impossible d'apprécier ρ et ε, il est plus simple

---

([1]) La surface libre de la couche ne sera généralement pas une surface de niveau, quoiqu'elle ne soit soumise qu'à une pression normale. En effet, la condition qui exprimerait qu'elle est de niveau sera presque toujours incompatible avec celle qui exprime que la valeur de la fonction potentielle de la couche est constante pour tous les points du corps conducteur. La distribution des pressions dans la couche différera donc quelque peu de celle que donne l'Hydrostatique.

de poser

$$\rho\varepsilon = h,$$

h étant ce que l'on est convenu d'appeler la *densité superficielle de l'électricité*. On a ainsi, pour la fonction potentielle,

$$(15) \qquad V = -\int h \frac{d\omega}{r},$$

et pour la masse de la couche électrique, c'est-à-dire la *charge électrique* du corps,

$$(16) \qquad M = \int h \, d\omega.$$

Des considérations qui précèdent, il résulte que l'électricité peut être regardée comme formant, à la surface du conducteur, une pellicule sans épaisseur appréciable, mais ayant une densité constante ou variable par unité de surface.

7. *Relation entre deux charges que peut recevoir un conducteur et les deux fonctions potentielles correspondantes relatives à un même centre.* — Si l'on substitue à la couche électrique dont la densité superficielle est h une autre couche dont la densité soit proportionnelle à cette dernière, la nouvelle satisfera encore à la condition de l'équilibre électrique, car, puisque V est constant dans l'intérieur du corps dans le premier cas, il le sera également dans le second.

Soient M′ et V′ ce que deviennent M et V, lorsqu'on passe du premier état d'équilibre au second, en concevant le même centre potentiel. Nous aurons évidemment

$$(17) \qquad \frac{M'}{M} = \frac{V'}{V},$$

et, en distinguant par l'indice o les valeurs que prennent V′ et V lorsque le centre potentiel se trouve dans l'intérieur du conducteur,

$$(17') \qquad \frac{M'}{M} = \frac{V'_0}{V_0}.$$

On voit ainsi que deux charges électriques successives d'un même corps sont *proportionnelles aux niveaux potentiels correspondants*.

On comprend ainsi ce que l'on doit entendre en disant que l'on *charge un corps à un niveau potentiel déterminé*.

Les formules (17) et (17′) peuvent se mettre sous les formes suivantes,

(18) $$MV' = M'V,$$

(18′) $$MV'_0 = M'V_0.$$

8. *Rappel d'une formule de Green.* — Soient

U, V deux fonctions des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, assujetties, ainsi que leurs dérivées partielles, à rester finies dans un volume terminé par une surface fermée ;

du, $d\omega$ deux éléments respectifs du volume de la surface ;

dn une longueur infiniment petite portée à partir de la surface sur la normale extérieure.

On a la relation

(A) $$\left\{\begin{aligned} &\int U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)-\int U\frac{dV}{dn}\,d\omega\\ &\quad=\int V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)-\int V\frac{dU}{dn}\,d\omega,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle la première et la troisième intégrale se rapportent au volume et les deux autres à la surface.

Prenant $U = 1$, on a simplement

(A′) $$\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)du=\int\frac{dV}{dn}\,d\omega.$$

9. *Action exercée par une couche électrique en équilibre sur un point de sa masse.* — Ce problème comporte trois questions que nous allons examiner successivement.

dn la distance du point a_1 de la surface A_1B_1 à une surface de niveau qui en est infiniment voisine, et comprise entre elle et A_2B_2, tandis que, au point de vue de la formule (12), dn a une signification contraire. Nous avons donc

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 = 4\pi\, dM \quad (^1),$$

ce qui exprime que *la différence des forces électriques qui s'exercent sur deux éléments correspondants de deux surfaces de niveau est égale au produit par 4π de la masse électrique contenue dans le volume orthogonal déterminé par ces deux éléments.*

2° Supposons maintenant que A_1B_1 soit la surface du conducteur : comme nous l'avons fait remarquer plus haut, le terme $\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega$ correspond à un déplacement normal dans l'intérieur du corps où la fonction potentielle est constante; ce terme est donc nul.

En admettant maintenant que la couche électrique soit extrêmement mince, que A_2B_2 passe par un point de la surface libre situé dans l'intérieur de la surface latérale (a_1a_2, b_1b_2), nous pourrons prendre

$$dM = h\, d\omega_2,$$

h étant la densité de la couche électrique en a_1; en supprimant l'indice 2 devenu inutile, l'équation (α) se réduit ainsi à la suivante,

$$(19) \qquad \frac{dV}{dn} = 4\pi h,$$

qui exprime que :

La force, rapportée à l'unité de masse exercée en un point de la couche électrique, est égale au produit par 4π de la densité superficielle correspondante.

3° L'action totale exercée sur la masse (a_1a_2, b_1b_2) sera

$$h\, d\omega \cdot 4\pi h = 4\pi h^2 d\omega.$$

---

(1) En supposant $dM = 0$, on retombe sur un théorème de Michel Chasles.

d'où

$$(b) \qquad h = \frac{3}{4} \frac{M p}{\pi abc(\lambda^2 + \lambda + 1)},$$

ou, en remplaçant p par sa valeur en fonction des coordonnées,

$$(c) \qquad h = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi abc(\lambda^2 + \lambda + 1)\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Pour déterminer le niveau potentiel, nous pourrons prendre pour centre potentiel le centre O de l'ellipsoïde.

Concevons un cône partant du sommet O, et dont l'ouverture sphérique, infiniment petite, soit $d\omega$. Ce cône déterminera dans la couche un élément de volume que nous pourrons diviser en d'autres éléments secondaires par les surfaces infiniment voisines semblables à celle de l'ellipsoïde.

Soient r, $r' = ru$ les portions d'une génératrice du cône déterminées par l'ellipsoïde et l'une des surfaces ci-dessus; la fonction potentielle d'un élément secondaire sera

$$-\rho r'^2 d\omega \frac{dr'}{r'} = \rho r^2 d\omega u\, du,$$

et, en intégrant entre les limites $u = 1$, $u = \lambda$, on obtiendra, pour celle de l'élément déterminé par le cône,

$$-\rho \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} r^2 d\omega.$$

Ainsi donc nous aurons, pour le niveau potentiel cherché,

$$(d) \qquad V_0 = -\rho \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int r^2 d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'ellipsoïde.

Soient θ et φ les angles formés par r avec Oz et ses projections sur

ce plan xOy avec Ox; nous avons

$$d\omega = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta,$$
$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

et de l'équation de l'ellipsoïde on tire, par suite,

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

La formule (d) devient ainsi

$$V_0 = -\rho\frac{(\lambda^2-1)}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0 \frac{\sin\theta\, d\theta}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}},$$

ou encore

$$(e)\quad V_0 = -\rho\frac{(\lambda^2-1)}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} \frac{du}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)u^2};$$

en posant $u = \cos\theta$.

Supposons d'abord que les trois axes soient inégaux et que l'on ait

$$a > b > c,$$

et posons

$$A^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2},\quad B^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

L'intégrale par rapport à u de l'expression (e) prend la forme

$$\frac{1}{AB}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{d\,Bu}{A}}{1 + \frac{B^2u^2}{A^2}} = \frac{2}{AB}\,\text{arc tang}\frac{B}{A};$$

par suite, on a

$$
(f)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_0 = -\rho(\lambda^2-1)\int_0^{2\pi} & \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}} \\
& \times \operatorname{arctang}\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}},
\end{aligned}
\right.
$$

intégrale qu'il est impossible de déterminer dans le cas général; toutefois, le problème se trouve ramené à une quadrature.

Mais l'intégration s'effectue facilement quand l'ellipsoïde est de révolution; admettons, en effet, que l'on ait $a = b$, la formule (e) devient

$$
V_0 = -\pi\rho(\lambda^2-1)a^2\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)u^2};
$$

selon que $a > c$ ou $a < c$, ou que l'ellipsoïde est aplati ou allongé, on trouve, en ayant égard à la formule (a),

$$
(g)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_0 &= -2\rho\pi(\lambda^2-1)a^2\,\frac{\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}} \\
&= -\frac{3}{2}\,\frac{(\lambda-1)M}{(\lambda^2+\lambda+1)c}\,\frac{\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}},
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(h)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_0 &= -2\pi\rho\,\frac{(\lambda^2-1)a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} \\
&= -\frac{3}{4}\,\frac{(\lambda-1)M}{(\lambda^2+\lambda+1)\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Hypothèse d'une couche très mince. — Comme $\lambda - 1$ est très petit, nous pouvons faire $\lambda = 1$ dans l'équation (c), qui devient

$$(c') \qquad h = \frac{M}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Si l'on a $a > b > c$, le minimum de h correspondra à $x = 0$, $y = 0$, $z = c$, et sera

$$h = \frac{M}{4\pi ab},$$

et son maximum,

$$h = \frac{M}{4\pi bc}.$$

En portant cette dernière valeur dans la formule (18) du numéro précédent, on trouve que, pour que la couche puisse être en équilibre, il faut que

$$M < 2bc\sqrt{P}.$$

On voit ainsi que si l'ellipsoïde est très allongé, ou si b et c sont très petits, il arrivera que, même sous une très faible charge, l'électricité tendra à s'écouler ou s'écoulera aux sommets du grand axe, ce qui, à un certain point, peut expliquer le pouvoir des pointes.

En éliminant z dans la formule (c) au moyen de l'équation de l'ellipsoïde, on trouve

$$(c'_1) \qquad h = \frac{M}{4\pi ab\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}}.$$

Supposons que l'ellipsoïde soit assez aplati dans la direction de Oz pour qu'il devienne en quelque sorte un plateau elliptique. A une distance suffisante du bord, le terme $c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$ sera très petit par rapport à $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, et l'on aura sensiblement

$$h = \frac{M}{4\pi ab}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Dans le voisinage du bord, $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ devient, au contraire, très petit par rapport à $c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$, et l'on a alors, à très peu près,

$$h = \frac{M}{4\pi abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{M}{4\pi a^2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2}}.$$

Dans le cas d'une sphère dont le rayon est a, la formule (c') donne ce résultat évident à priori

$$h = \frac{M}{4\pi a^2}.$$

En faisant $\lambda = 1$ dans le troisième membre des formules (g) et (h), on trouve

$$(g') \qquad V_0 = -\frac{M}{c} \frac{\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}},$$

$$(h') \qquad V_0 = -\frac{M}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}.$$

Si $a = c$, on déduit facilement de ces formules la suivante

$$V_0 = -\frac{M}{a},$$

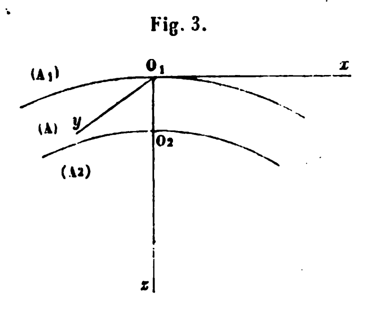
qui est relative à la sphère et qui est évidente.

§ III. — Des systèmes de conducteurs.

11. *Condition d'équilibre électrique de deux corps conducteurs terminés par des surfaces parallèles* (théorie de Green). — Considérons deux corps conducteurs (A_1), (A_2) chargés d'électricité dont les surfaces

sont parallèles, très peu éloignées l'une de l'autre et séparées par une substance non conductrice (A).

Fig. 3.



Soient (*fig.* 3)

O_1 un point quelconque de la surface du premier corps;
O_2 le point où la normale O_1z en O_1 rencontre la surface du second corps;
O_1x, O_1y deux axes rectangulaires compris dans le plan tangent en O;
e l'épaisseur constante de (A) supposée assez petite pour qu'on puisse négliger celles de ses puissances qui sont supérieures à la seconde;
h_1, h_2 les densités électriques superficielles et V_1, V_2 les niveaux potentiels de (A_1) et (A_2);
V la fonction potentielle, variable d'un point à un autre de (A).

Nous admettrons, pour fixer les idées, que la surface de (A_1) oppose sa convexité au plan tangent xO_1y et nous désignerons par l'indice 1 les dérivées partielles qui se rapportent à l'origine O_1.

Nous avons

$$V_2 = V_1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 e + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 \frac{e^2}{2}. \tag{21}$$

Pour un point infiniment voisin de O_1 situé sur l'intersection de la face (A_1) et du plan zO_1x, on a, en remarquant que $dV = 0$ et q. dz est du second ordre par rapport à dx,

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 dz + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 \frac{dx^2}{2}.$$

Si R_x désigne le rayon de courbure au point O_1 de la section considé

rée, on a

$$dz = \frac{dx^2}{2R_x},$$

et l'équation précédente se transforme dans la suivante

$$o = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{R_x}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1\right] dx.$$

Comme cette dernière doit être vérifiée quel que soit dx, il faut que

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_1 = o, \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{R_x}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1 = o,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 = -\frac{1}{R_x}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1.$$

En désignant par R_y le rayon de courbure en O_1 de la section faite dans la surface de (A_1) par le plan zO_1y, on aurait de même

$$(\beta) \qquad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_1 = -\frac{1}{R_y}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1;$$

mais, comme (A) est extérieur à (A_1), V doit satisfaire à l'équation (7) du n° **4**; en substituant dans cette équation les valeurs (α), (β) et désignant par $\frac{1}{\Gamma}$ la courbure $\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}$ de la surface en O_1, on trouve

$$\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dV}{dz}\right)_1.$$

L'équation (21) devient alors

$$V_2 - V_1 = e\left(\frac{dV}{dz}\right)_1\left(1 + \frac{e}{2\Gamma}\right).$$

Mais on a, en vertu de la formule (19) du n° **9**,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)_1 = 4\pi h_1,$$

par suite

$$(22) \qquad V_2 - V_1 = 4\pi e h_1 \left(1 + \frac{e}{2\Gamma}\right).$$

Supposons maintenant que l'on place l'origine des coordonnées en O_2 en dirigeant l'axe des z suivant O_2O_1; la courbure de la surface de (A_2) en O_2 sera de signe contraire à celle de la surface de (A_1) en O_1, mais pourra être considérée comme étant égale à $\frac{1}{\Gamma}$ en valeur absolue. De l'équation (22) on déduira ainsi la suivante

$$(22') \qquad V_1 - V_2 = 4\pi e h_2 \left(1 - \frac{e}{2\Gamma}\right),$$

et de ces deux formules

$$(23) \qquad h_2 = -h_1 \left(1 + \frac{e}{\Gamma}\right).$$

Soient $d\omega_1$ un élément de la surface de (A_1) en O_1; $d\omega_2$ l'élément déterminé sur la surface de (A_2) par les normales menées aux différents points du périmètre de $d\omega_1$, on a, aux termes du second ordre près,

$$(24) \qquad d\omega_2 = d\omega_1 \left(1 - \frac{e}{\Gamma}\right) \quad (^1),$$

(1) Soient

$$mn = ds, \quad mn' = ds'$$

les éléments respectifs des deux lignes de courbure passant par le point m d'une surface, m' l'intersection de la ligne de courbure de même espèce que mn' passant par n, avec la ligne de courbure de la seconde espèce passant par n'; R, R' les rayons de courbure de mn et mn'. L'aire $mnm'n'$ a pour expression

$$d\omega_1 = ds\, ds'.$$

Menons les normales aux points m, n, m', n' jusqu'à leur rencontre avec une surface intérieure parallèle à la proposée et qui en est distante de e. Nous déterminerons ainsi sur la seconde surface un élément superficiel qui aura pour

d'où, au même degré d'approximation,

$$(25)\qquad h_1\, d\omega_1 = -h_2\, d\omega_2$$

ce qui exprime que *les quantités d'électricité qui se trouvent sur deux éléments correspondants des surfaces des deux conducteurs doivent être égales et de signes contraires*. Ce théorème s'étend évidemment à deux portions correspondantes des deux surfaces, et, par suite, aux surfaces entières.

Si l'on néglige $\frac{e}{r}$ devant l'unité, on a simplement

$$(26)\qquad h_1 = -h_2 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e},$$

ce qui exprime que *la densité électrique superficielle de chaque conducteur est proportionnelle à l'excès du niveau potentiel de l'autre sur le sien propre et varie en raison inverse de la distance des deux conducteurs.*

Les considérations qui précèdent sont notamment applicables au *condensateur, au carreau de Franklin et à la bouteille de Leyde.*

Si M_1 et M_2 sont les charges des armatures (A_1), (A_2) de la bouteille de Leyde, Ω la surface de cette armature, on a

$$(27)\qquad M_1 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e}\,\Omega = -M_2.$$

---

valeur

$$d\omega_2 = ds\left(\frac{R-e}{R}\right) ds'\left(\frac{R'-e}{R'}\right) = ds\,ds'\left[1 - e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \frac{e^2}{RR'}\right],$$

d'où

$$d\omega_2 = d\omega_1\left[1 - e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \frac{e^2}{RR'}\right].$$

Si e est assez petit pour qu'on puisse en négliger la seconde puissance, on a

$$d\omega_2 = d\omega_1\left[1 - e\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\right],$$

ce qui n'est autre chose que la formule (24) du texte.

Nous admettrons en principe que *lorsqu'un corps électrisé par influence se trouve en communication avec la terre, son niveau potentiel est nul.* Et, en effet, la fonction potentielle a la même valeur en un point quelconque de l'intérieur du système formé par la terre et le corps; comme il y a dans la terre autant d'électricité positive que d'électricité négative, cette valeur est nécessairement nulle. La grandeur du rayon de la Terre suffirait d'ailleurs pour justifier le principe dont il s'agit.

Si donc l'armature extérieure (A_2) de la bouteille de Leyde est en communication avec le sol, nous aurons $V_2 = 0$; sa charge sera

$$(28) \qquad M_2 = \frac{V_1 \Omega}{4\pi e} = -M_1,$$

M_1 étant la charge de l'autre armature.

12. *Système formé de conducteurs dont l'un enveloppe les autres.* — Soient (A_1) le conducteur enveloppant; (A_2), (A_3), ... les autres conducteurs; M_i la charge de (A_i).

Considérons l'espace limité par les surfaces de tous les conducteurs ou plutôt par des surfaces de niveau extérieures qui en sont infiniment voisines. Pour chacun des points de cet espace l'équation (7) s'applique et l'équation (A') se réduit à

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = 0.$$

Mais, en remarquant que l'élément dn doit être changé de signe, puisqu'il est dirigé en sens inverse de celui qui se rapporte à la surface de (A_i) et à la surface de niveau extérieure qui en est infiniment voisine, et désignant par h la densité en un point quelconque des couches électriques, la formule (19) donne

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi h,$$

d'où

$$\int h \, d\omega = 0,$$

ou encore

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0.$$

Ainsi *la somme algébrique des charges de tous les conducteurs est nulle.*

Supposons, en particulier, que le conducteur (A_1) n'ait pas reçu de charge initiale, et qu'il ne soit ainsi électrisé que par l'influence de (A_2), (A_3), ...; en désignant par M'_1 la quantité d'électricité qui se trouve sur sa surface extérieure, nous aurons $M'_1 + M_1 = 0$, d'où, en vertu de la formule ci-dessus,

$$M'_1 = - M_1 = M_1 + M_2 + \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression de cette loi de Faraday : *La quantité d'électricité induite sur un corps enveloppant est égale à la quantité inductrice.*

13. *Conducteur présentant des vides intérieurs qui ne renferment pas de masses électriques.* — Nous allons d'abord établir le lemme suivant : *Quand une surface fermée ne renferme aucune masse électrique et que sur cette surface la fonction potentielle a une valeur constante, cette fonction est également constante dans l'espace déterminé par la surface.* En effet, en un point de cet espace, l'équation (7) est satisfaite. On aura d'ailleurs $\frac{dV}{dn} = - 4\pi h = 0$, puisque la surface n'est pas recouverte d'électricité et que partout $h = 0$. Une formule de Green [1] conduit au résultat suivant

$$\int \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}\right) du = 0,$$

---

[1] En conservant les notations du n° 8, on a

$$\int U\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right) du$$
$$= \int U\frac{dV}{dn} d\omega - \int \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right) du.$$

Si l'on fait $U = V$, cette formule se réduit à la suivante

$$\int V\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right) du = \int V\frac{dV}{dn} - \int \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}\right) du,$$

qui est celle dont on fait usage dans le texte.

qui exige que V soit constant dans l'espace considéré, ce qu'il fallait établir.

Revenons maintenant à notre sujet et considérons un conducteur dont la surface extérieure est électrisée, présentant des vides intérieurs qui ne renferment pas de masses électriques.

Soient V_1 la valeur constante de la fonction potentielle à la surface d'une cavité; K la valeur de la fonction potentielle en un point O du vide; Om un rayon quelconque partant du point O et rencontrant la surface en un point m. En suivant ce rayon, la fonction potentielle variera entre K et V_1, et il y aura l'un n de ses points pour lequel la fonction potentielle aura une valeur déterminée K' comprise entre K et V: le lieu des points n sera une surface rentrant dans les conditions du lemme précédent et dans l'intérieur de laquelle la fonction potentielle serait égale à K', tandis que, en O, elle est égale à K, ce qui est absurde. Ainsi, comme on ne peut pas supposer que K soit différent de V_1, il faut que la fonction potentielle dans l'intérieur de l'espace vide ait la même valeur constante qu'à sa surface.

Il résulte de là que *des cavités dans un conducteur n'ont aucune influence sur le mode de répartition de l'électricité sur sa surface extérieure et qu'il se comporte comme s'il était plein.*

14. *Théorème de Clausius* [1]. — Considérons un système composé de m corps conducteurs (A_1), (A_2), ..., (A_i), ..., (A_m) et supposons que ces corps aient reçu successivement deux charges électriques.

Soient

M_i, M'_i les quantités d'électricité qui recouvrent (A_i) lors du premier et du second chargement;
V_i, V'_i les niveaux potentiels correspondants.

Concevons l'espace limité par les surfaces des conducteurs et par celle d'une sphère d'un rayon R aussi grand que l'on voudra qui enveloppe tous les corps et dont le centre se trouve dans le voisinage de ces corps.

(1) *Annales de Physique et de Chimie* de G. Wiedemann, p. 493 et suiv.; 1877.

Soient

du un élément de volume de cet espace au point (x, y, z);
V, V' les valeurs des fonctions potentielles relatives à ce point lors de la première et de la seconde charge;
$d\omega$ un élément de l'une ou de l'autre des surfaces qui limitent l'espace.

La formule (A) du n° **8** donne

$$\int V\frac{dV'}{dx}d\omega - \int V\left(\frac{d^2V'}{dx^2}+\frac{d^2V'}{dy^2}+\frac{d^2V'}{dz^2}\right)du$$
$$=\int V'\frac{dV}{dx}d\omega - \int V'\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)du.$$

Comme il n'y a pas d'électricité dans l'espace ci-dessus défini et que le point (x, y, z) est extérieur aux (A_i), V et V' satisfont à l'équation (7) et la formule précédente se réduit à

$$(\alpha)\qquad \int V\frac{dV'}{dn}d\omega = \int V'\frac{dV}{dn}d\omega.$$

Considérons d'abord la portion de l'intégrale du premier membre de cette équation qui se rapporte à la sphère et prenons pour centre O de cette sphère le centre de gravité des masses M'_i; si la distance r d'un point quelconque (x, y, z) à ce centre est suffisamment grande, on a

$$V' = \frac{\Sigma M'_i}{r},$$

d'où

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{dV'}{dr} = -\frac{\Sigma M'_i}{r^2},$$

et, pour la surface de la sphère,

$$\frac{dV'}{dn} = -\frac{\Sigma M'_i}{R^2},$$

quantité égale à zéro si nous prenons $R = \infty$, ainsi qu'il nous est

permis de le supposer. Comme le même raisonnement s'applique à $\frac{dV}{dn}$, on voit que la sphère ne joue aucun rôle dans l'équation (α).

Désignons par $d\omega_i$ un élément de la surface du conducteur (A_i); V_i et V'_i étant constantes à la surface de ce corps comme dans son intérieur, l'équation (α) devient

$$(\beta)\quad V_1\int\frac{dV'}{dn}d\omega_1+V_2\int\frac{dV'}{dn}d\omega_2+\ldots=V'_1\int\frac{dV}{dn}d\omega_1+V'_2\int\frac{dV'}{dn}d\omega_2+\ldots$$

Soient h_i, h'_i les densités électriques à la surface de (A_i) qui se rapportent respectivement à la première et à la seconde charge; on a, en vertu de la formule (19) et en changeant le signe de dn, comme au n° **12**,

$$\frac{dV'_i}{dn}=-4\pi h'_i,\quad \frac{dV_i}{dn}=-4\pi h_i,$$

et l'équation (β) devient

$$V_1\int h'_1\,d\omega'_1+V_2\int h'_2\,d\omega'_2+\ldots=V'_1\int h\,d\omega_1+V'_2\int h_2\,d\omega_2+\ldots,$$

ou encore [1]

$$(29)\qquad V_1M'_1+V_2M'_2+\ldots=V'_1M_1+V'_2M_2+\ldots;$$

telle est la formule qui constitue le théorème de M. Clausius, et dont on déduit, comme conséquences, plusieurs autres théorèmes particuliers, auxquels divers auteurs étaient arrivés auparavant, et que nous rappellerons dans ce qui suit.

15. Supposons que le conducteur (A_i) se trouve en communication avec la terre; on a (11) $V_i=0$.

Admettons maintenant que le corps (A_i) étant isolé n'ait point reçu de charge initiale; il ne sera électrisé que par influence, c'est-à-dire qu'il sera recouvert de deux quantités égales d'électricité de signe

---

[1] D'après M. Bertrand (*Journal de Physique* de d'Almeida, t. III, p. 73), cette formule aurait été antérieurement établie par Gauss.

contraire, de sorte que l'on a $M_i = o$, $M'_i = o$. De ces considérations résulte le théorème suivant :

Les corps qui, lors des deux charges, sont en communication avec la Terre ou qui sont isolés sans charge initiale ne donnent aucun terme dans l'équation (29).

16. Admettons maintenant, comme tout ce qui va suivre, que les (A_i) autres que (A_1) et (A_2) soient en communication avec la terre, ou que, étant isolés, ils ne reçoivent pas de charge initiale. L'équation (29) se réduira à la suivante

$$V_1 M'_1 + V_2 M'_2 = V'_1 M_1 + V'_2 M_2. \tag{30}$$

17. Supposons que, (A_1) et (A_2) étant isolés et non électrisés, (A_1) seul reçoive une charge que nous désignerons par E, en développant dans (A_2) le niveau potentiel V_2; puis que (A_2) reçoive la même charge en soustrayant (A_1) à toute action extérieure. Nous avons

$$M_2 = o, \quad M'_1 = o, \quad M_1 = M'_2 = E,$$

d'où

$$V_2 = V'_1. \tag{31}$$

Donc, *le niveau potentiel qui naît dans* (A_2), *quand* (A_1) *a été seul chargé, est égal à celui qui naît dans* (A_1) *quand on effectue l'opération inverse et que les deux charges sont égales.*

18. *Théorème de Riemann.* — Supposons que, à la première charge, le corps (A_1) se trouve au niveau potentiel K, que (A_2), mis en communication avec la terre, reçoive de ce corps par influence la quantité d'électricité M_2; puis que, à la seconde décharge, (A_2) se trouve au même niveau potentiel K, tandis que (A_1), mis en communication avec le sol, se trouve recouvert de la quantité d'électricité M'_1. Nous avons

$$V_2 = o, \quad V'_1 = o, \quad V_1 = V'_2 = K,$$

et la formule (30) donne

$$(32) \qquad M'_1 = M_2.$$

Donc *la quantité d'électricité qui, sous l'influence de* (A_1), *s'est accumulée sur* (A_2) *mis en communication avec la Terre, et celle qui s'est accumulée sur* (A_1) *mis en relation avec la Terre, par l'influence de* (A_2), *sont égales lorsqu'il y a égalité entre les niveaux potentiels pour ces deux charges.*

§ IV. — Du travail des forces électriques. — Décharges.

19. *Expression du travail des forces électriques.* — Soient (A_1), (A_2), ..., (A_i), ... des conducteurs chargés d'électricité et réagissant les uns sur les autres.

Une modification introduite par une cause quelconque dans les intervalles intermoléculaires du fluide électrique donnera lieu à une production de travail mécanique dont la considération mérite un sérieux examen.

Désignons par r la distance de deux particules électriques, dm et dm' appartenant au système des conducteurs ci-dessus désignés. Le travail élémentaire des forces électriques a pour expression

$$d\mathcal{T} = \int \frac{dm\, dm'}{r^2} dr = -d \int \frac{dm\, dm'}{r},$$

le signe de l'intégration s'étendant à toutes les combinaisons deux à deux des molécules électriques.

Nous désignerons sous le nom de *potentiel total* du système électrique l'expression

$$W = -\int \frac{dm\, dm'}{r},$$

de sorte que nous aurons

$$d\mathcal{T} = dW.$$

En passant d'un certain état initial, que nous caractériserons par l'indice zéro, à un état quelconque, nous aurons pour le travail déve-

loppé entre les deux états

$$(1) \qquad \mathcal{E} = W - W_0.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, si le fluide revient à l'état neutre, on aura $W = 0$, puisque toutes les masses électriques s'annuleront, et par suite

$$(2) \qquad \mathcal{E} = -W_0.$$

Si nous désignons par V la fonction potentielle de dm relative à tous les autres éléments du système électrique, et si nous considérons l'intégrale

$$\int V dm,$$

étendue à tous les éléments dm du système total, les termes tels que $\frac{dm\,dm'}{r}$ seront reproduits deux fois, et nous devrons prendre

$$(3) \qquad W = \frac{1}{2}\int V dm.$$

Si nous remarquons que, à la surface de (A_i) comme dans son intérieur, V est constant ou égal au niveau potentiel V_i, pour chacun des conducteurs V sortira de l'intégrale, et l'on voit que, en désignant par M_i la charge du conducteur ci-dessus, on aura

$$(4) \qquad W = \frac{1}{2}(M_1 V_1 + M_2 V_2 + M_3 V_3 \ldots).$$

Si (A_i) est isolé et n'a pas reçu de charge initiale, le conducteur ne sera électrisé que par influence et renfermera, par suite, autant d'électricité positive que d'électricité négative, et l'on aura $M_i = 0$; si maintenant (A_i) est en communication avec la Terre, on a $V_i = 0$. De sorte que, dans les deux cas, (A_i) ne laissera aucune trace dans la formule (4).

20. *Décharge d'une bouteille de Leyde.* — Soient (A_1) et (A_2) l'armature intérieure et l'armature extérieure, les deux seuls conducteurs

que nous avons à considérer; comme la seconde de ces armatures est censée mise en communication avec le sol, nous devrons supposer $V_2 = 0$; les formules (4) et (2) nous donnent pour le travail effectué après la décharge

$$(5) \qquad \mathfrak{T} = -\frac{1}{2}M_1V_1,$$

ou, en ayant égard à la formule (27) du n° **11**,

$$(6) \qquad \mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{\omega}M_1^2.$$

Ce travail, qui, pour une même bouteille, est proportionnel au carré de la charge, est employé en partie à vaincre la résistance de l'air ou celle que présente un corps non conducteur traversé par l'électricité, ce qui donne lieu à l'étincelle; l'autre partie est transformée en chaleur et correspond à la perte d'une demi-force vive, qui devra être d'autant plus grande que la vitesse du fluide sera elle-même plus grande ou que la section et la longueur du fil de communication seront plus faibles.

On explique ainsi pourquoi, toutes choses égales d'ailleurs, lorsque le fil est gros et court, l'étincelle est énergique et l'échauffement du conducteur très faible, tandis que l'inverse a lieu quand le fil est long et d'un petit diamètre.

Si l'on augmente la résistance à vaincre en interposant entre les extrémités du fil une carte ou une feuille de mica, l'étincelle est plus forte et l'échauffement plus faible, comme M. Riess l'a reconnu par l'expérience ([1]).

21. *Décharge d'une batterie*. — Considérons une batterie composée de n bouteilles identiques; il est évident que le travail effectué pendant la décharge s'obtiendra en multipliant les équations (5) et (6) par n, et nous aurons notamment

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{\pi}nM_1^2.$$

([1]) *Annales de Poggendorff*, t. XLV.

Si M désigne la charge totale $M_1 n$, cette expression prend la forme suivante

$$(7) \qquad \mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{\Omega}\frac{M^2}{n},$$

d'où cette loi, découverte expérimentalement par M. Riess [1] : *L'énergie totale d'une batterie est proportionnelle au carré de la charge et en raison inverse du nombre de bouteilles.*

22. *Décharges incomplètes.* — Supposons qu'après avoir chargé la batterie ci-dessus de n bouteilles identiques on réunisse les armatures intérieures à celles d'une batterie à l'état neutre, composée de n' bouteilles semblables aux précédentes.

Le travail accumulé $\mathfrak{T}'$ dans la batterie de $n+n'$ bouteilles s'obtiendra en remplaçant n par $n+n'$ dans la formule (7), puisque la charge totale est restée la même. Nous avons donc

$$\mathfrak{T}' = \frac{2\pi e}{\Omega}\frac{M^2}{n+n'}.$$

Mais le travail emmagasiné primitivement dans la batterie de n bouteilles est fourni par la même formule (7). D'où il suit que le travail accompli dans la réunion des deux batteries a pour expression

$$\mathfrak{T} - \mathfrak{T}' = \frac{2\pi e}{\Omega}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+n'}\right),$$

ou encore

$$(8) \qquad \mathfrak{T} - \mathfrak{T}' = T\frac{n'}{n+n'},$$

relation à laquelle M. Riess est arrivé par l'expérience.

23. *Batteries chargées en cascades.* — Soient (A_1), (A_2), ..., (A_m) m batteries composées respectivement de n_1, n_2, ..., n_m bouteilles identiques; l'armature extérieure de la $n^{\text{ième}}$ batterie communique

---

[1] Plusieurs géomètres ont donné à l'expression de $\mathfrak{T}$ le nom d'*énergie potentielle*.

avec le sol, tandis que l'armature intérieure de la première est en relation avec une source dont le niveau potentiel est V_1. L'armature intérieure de la première batterie reçoit une charge M_1; sur l'armature extérieure il se développe une charge $-M_2$, tandis que la charge de l'armature intérieure de la seconde batterie est M_2, le niveau potentiel V_2 étant le même pour ces deux conducteurs, et ainsi de suite, en remarquant toutefois que $V_m = 0$. Le travail accumulé dans le système total est donc

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{2}(M_1 V_1 - M_2 V_2 + M_2 V_2 - M_3 V_3 + \ldots)$$

ou simplement

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{2} M_1 V_1,$$

comme on devait le prévoir d'après une remarque faite à la fin du n° **19**.

Si nous prenons $\lambda = \frac{4\pi e}{\Omega}$, la formule (27) du n° **11** donne

$$V_1 - V_2 = -\lambda \frac{M_1}{n_1},$$

$$V_2 - V_3 = -\lambda \frac{M_2}{n_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$V_m - 0 = -\lambda \frac{M_m}{n_m},$$

en remarquant que la charge de chaque bouteille de (A_i) est $\frac{M_i}{n_i}$. On déduit de là

$$V_1 = -\lambda\left(\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \cdots\right)$$

et enfin

$$(9) \qquad \mathfrak{T} = \frac{\lambda}{2} M_1 \left(\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \cdots\right).$$

Si les bouteilles sont parfaitement fermées, les charges des deux arma-

tures de chacune d'elles sont égales, ou

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots;$$

par suite,

$$\mathfrak{T} = \frac{\lambda}{2} M_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots \right).$$

Dans le cas de deux batteries seulement, on a

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \lambda M_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right),$$

résultat auquel M. Riess est arrivé par l'expérience.

THÉORIE DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

§ I. — Courants constants.

1. Lorsque la fonction potentielle n'est pas constante dans l'intérieur d'un conducteur, l'électricité entre en mouvement et il se produit un *courant électrique*. Si cette fonction est indépendante du temps, ce mouvement devient permanent au bout d'un temps très court, à partir de l'instant initial, et le courant devient *constant*. Dans ce qui suit nous ne nous occuperons que des courants de cette nature.

2. *Loi de Ohm.* — Soient

A un point intérieur du conducteur;
V sa fonction potentielle;
$d\omega_x$ un élément superficiel en ce point normal à une droite Ox partant d'une origine O déterminée;
q_x la quantité d'électricité, rapportée à l'unité de surface, qui traverse $d\omega_x$ dans l'unité de temps, et qui ne dépend que de la position de A et de l'orientation de Ox;
dx une longueur infiniment petite portée à partir de A sur la normale à $d\omega_x$.

Ohm suppose que le *flux électrique* q_x est proportionnel à la composante $\frac{dV}{dx}$ de la force qui agit sur A, c'est-à-dire à la cause de ce flux.

On a ainsi, en désignant par a une constante,

$$(1) \qquad q_x = a\frac{dV}{dx}.$$

Cette expression n'est autre chose que celle d'un flux de chaleur traversant $d\omega_x$, en admettant que la température en A soit représentée par V.

Si donc Oy, Oz sont deux axes rectangulaires dont le plan est perpendiculaire à Ox, et x, y, z les coordonnées du point A, nous avons l'équation connue

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Mais on sait que, pour le point intérieur A, le second membre de cette équation, au lieu d'être nul, devrait être égal à $4\pi a\rho$, en désignant par ρ la densité du fluide concentrée en ce point; d'où il suit que $\rho = 0$, et comme conséquence :

1° *Le fluide se trouve à l'état neutre dans le conducteur;*

2° *L'électricité qui donne lieu à la fonction potentielle, c'est-à-dire au* NIVEAU POTENTIEL, *doit se trouver sur la surface du conducteur ou à l'extérieur de ce conducteur.*

Le flux principal, ou la plus grande valeur q de $q_x \ldots$, correspond au cas où Ox est parallèle à la normale en A à la surface de niveau passant par ce point; et, en continuant à désigner par dx un élément infiniment petit de la partie extérieure de cette normale, nous aurons

$$(3) \qquad q = a\frac{dV}{dx}.$$

Nous rappellerons que q_x n'est autre chose que la projection de q sur Ox.

On est convenu de désigner sous le nom de *force électromotrice* en A la dérivée $\frac{dV}{dx}$.

3. *Des conducteurs allongés dont la section est très petite.* — Dans

ces conducteurs, qui sont ceux que l'on emploie le plus généralement, on peut considérer la section normale ω en un point A de l'axe comme un élément de surface de niveau; et l'on a, pour la quantité de fluide qui traverse, dans l'unité de temps, cette section, c'est-à-dire pour l'*intensité du courant*,

$$i = a\omega \frac{dV}{dx}. \tag{4}$$

Soient V_0, V_1 les valeurs de V qui se rapportent à deux points déterminés A_0, A_1 de l'axe du conducteur; l la longueur de l'arc A_0A_1.

Nous aurons

$$V_1 - V_0 = i\int_0^l \frac{dx}{a\,d\omega}. \tag{5}$$

On est convenu de donner à la valeur $V_1 - V_0$ le nom de *force électromotrice de la longueur* A_0A_1 du courant, et de représenter par $\frac{dx}{a\omega}$ la *résistance à la conductibilité de l'élément linéaire dx*. Nous représenterons par

$$R = \int_0^l \frac{dx}{a\omega} \tag{6}$$

la *résistance totale de la longueur l du courant*.

Nous avons ainsi

$$Ri = V_1 - V_0. \tag{7}$$

Si la section du courant est constante, on a

$$R = \frac{l}{a\omega},$$

et

$$a = \frac{\omega}{l}(V_1 - V_0). \tag{8}$$

Cette formule a été vérifiée expérimentalement au moyen du rhéo-

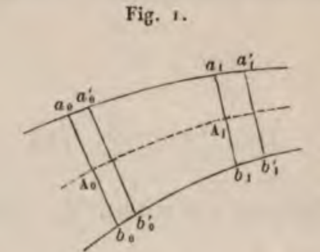
mètre, lorsque, ne changeant rien à la pile, c'est-à-dire à $(V_1 - V_0)$, on fait varier la section et la longueur du circuit.

4. *Loi de Joule.* — Considérons un conducteur de la même catégorie que les précédents.

Soient (*fig.* 1)

$a_0 b_0$, $a_1 b_1$ les sections normales à l'axe du circuit en A_0, A_1 ;

Fig. 1.



$a'_0 b'_0$, $a'_1 b'_1$ les sections que viennent occuper, au bout d'un temps infiniment petit dt, les particules électriques qui se trouvaient primitivement dans $a_0 b_0$, $a_1 b_1$.

Le travail des forces électriques développé dans le transport de la masse $a_0 b_0 a_1 b_1$ en $a'_0 b'_0 a'_1 b'_1$ ne peut résulter que du transport fictif de la masse $a_0 b_0 a'_0 b'_0$ égale à $i\,dt$ en $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ (1), puisque rien n'est changé dans la partie commune $a'_0 b'_0 a_1 b_1$. Le travail électrique effectué dans le temps dt est donc $(V_1 - V_0)dt$ et, dans l'unité de temps,

$$\mathfrak{T} = i(V_1 - V_0), \tag{9}$$

ou, en ayant égard à la relation (7),

$$\mathfrak{T} = i^2 R. \tag{10}$$

---

(1) On admet ainsi l'hypothèse des tranches dans le mouvement permanent des fluides.

Ce travail est équivalent à la demi-force vive de la masse électrique i, censée condensée en A_0, en passant de là en A_1, augmentée d'un terme proportionnel à la quantité de chaleur dégagée par le circuit. Si l'on considère la première de ces quantités comme négligeable, $\mathfrak{T}$ se trouvera ainsi transformée en une quantité de chaleur sensible $\mathfrak{Q}$, et l'on aura, en désignant par A l'équivalent mécanique de la chaleur, sous toute réserve du choix des unités,

$$(11) \qquad \mathfrak{Q} = \frac{i^2 R}{A}.$$

Ainsi donc *la quantité de chaleur développée dans le circuit est proportionnelle au carré de l'intensité du courant et à la résistance du conducteur.*

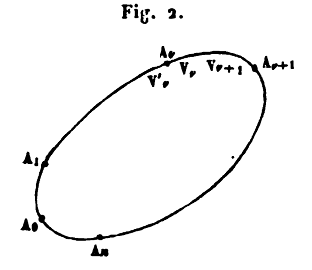
Cette loi, découverte expérimentalement par M. Joule, n'est qu'une conséquence de celle de Ohm et *vice versa*. Qu'il nous suffise de dire que nous avons déjà jusqu'ici une double justification des résultats de la théorie.

§ II. — Courants thermo-électriques.

5. Considérons un circuit formé de $n+1$ parties ou éléments appartenant respectivement à différents métaux, et soudées les unes à la suite des autres.

Si les soudures successives $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (*fig.* 2) sont portées à di-

Fig. 2.



verses températures, il se développera généralement un courant électrique d'intensité i.

Supposons, pour fixer les idées, sous toutes réserves, que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ indiquent le sens du courant.

Pour expliquer le fait dont il s'agit, on a été conduit, par des considérations qui appartiennent au domaine de la philosophie naturelle, et auxquelles nous ne croyons pas devoir nous arrêter, à admettre que le niveau potentiel change brusquement de valeur lorsque l'on traverse la soudure A_ν. Néanmoins, la formule (9), d'après la manière dont elle a été établie, est encore applicable à deux sections infiniment voisines situées de part et d'autre de A_ν.

Cela étant posé, soient

V_ν, $V'_{\nu+1}$ les valeurs du niveau potentiel aux extrémités A_ν, $A_{\nu+1}$ de l'une des parties du circuit;

R_ν la résistance à la conductibilité correspondante.

Nous avons

$$R_\nu i = V'_{\nu+1} - V_\nu.$$

En faisant la somme de toutes les expressions semblables et désignant par

$$\mathfrak{R} = \Sigma R_\nu$$

la résistance totale du circuit, il vient

$$\mathfrak{R} i = \Sigma(V'_{\nu+1} - V_\nu)$$

ou encore, comme il est facile de le reconnaître,

$$\mathfrak{R} i = \Sigma(V'_\nu - V_\nu). \tag{12}$$

Il faut que le second membre de cette expression soit positif pour que le courant ait lieu dans le sens supposé; s'il est négatif, le sens du courant sera changé; enfin, s'il est nul, il n'y aura pas de courant.

6. *Cas d'un courant bimétallique.* — C'est le seul cas qui ait été étudié par les physiciens et qui offre, par suite, de l'intérêt. Nous avons ici simplement

$$i = \frac{V'_0 - V_0 - (V_1 - V'_1)}{\mathfrak{R}}. \tag{13}$$

Comme l'intensité d'un courant thermo-électrique est toujours faible, on peut négliger la quantité de chaleur

$$\mathfrak{Q} = \frac{i^2 R}{A}$$

développée dans le courant, indépendante de celle qui se rapporte aux soudures A_0, A_1.

Soient

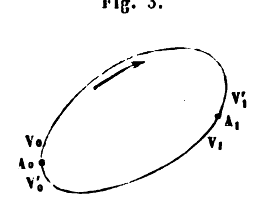
t_0, t_1 les températures de ces soudures;

$Q_0 = \frac{i(V'_0 - V_0)}{A}$ la quantité de chaleur dégagée par la surface A_0 dans l'unité de temps;

$Q_1 = \frac{i(V_1 - V'_1)}{A}$ la quantité de chaleur absorbée par la source froide A_1.

Comme le fluide électrique qui sert de véhicule à la chaleur revient

Fig. 3.



au même état quand il a parcouru le circuit, on peut appliquer ici le principe de Carnot et écrire

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{1 + \alpha t_0}{1 + \alpha t_1},$$

en se rappelant que α représente le coefficient de dilatation des gaz.

On déduit de là

$$\frac{V'_0 - V_0}{1 + \alpha t_0} = \frac{V_1 - V'_1}{1 + \alpha t_1}.$$

Nous représenterons ce rapport par $\frac{KR}{\alpha}$, et nous supposerons que K ne dépend que de la nature et des dimensions du circuit, et est par

conséquent indépendant des températures des soudures La formule (16) devient alors

$$(14) \qquad i = K(t_0 - t_1),$$

et s'accorde avec les résultats des expériences de César Becquerel, lorsque l'excès de température $(t_0 - t_1)$ ne dépasse pas 50°.

Au delà de cette limite, i croît moins rapidement que l'excès de température, et son accroissement devient sensiblement nul et même négatif quand $t_0 - t_1$ atteint et dépasse 300°. On attribue cette irrégularité à ce que deux métaux en contact, dont les températures sont très différentes, éprouvent des modifications dans leur constitution, et qu'ils se comportent vis-à-vis l'un de l'autre comme des métaux d'une autre nature.

§ III. — *Théorie de la pile.*

7. *De l'électrolyse.* — On donne le nom d'*électrolyte* à toute substance qui est complètement décomposée dans ses éléments chimiques lorsqu'elle est traversée par un courant. Si la décomposition n'a lieu que partiellement, en d'autres termes, si au moins un des produits de cette décomposition est encore une combinaison chimique, la substance est une *électrolycale*.

Les expressions *électrolyse* et *électrolysation* sont des dérivés de celle de *électrolyte*.

Une *électrode* est l'un ou l'autre des points de la substance par où arrive et d'où sort le courant.

L'électrolyse est soumise aux lois suivantes :

1° *L'action décomposante d'un courant, ou sa puissance chimique, est la même dans toutes ses parties.*

2° *La quantité de substance décomposée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui passe dans un temps donné, ou encore à l'intensité du courant.*

3° (Loi de Faraday). *Quand un même courant traverse successivement plusieurs électrolytes, les poids des éléments séparés sont entre eux comme leurs équivalents chimiques.*

9. Supposons que l'on place dans le circuit un certain nombre d'électrolytes (E_1), (E_2), ...; soient ε_ν, R_ν, q_ν l'équivalent électrochimique de (E_ν), sa résistance et la quantité de chaleur nécessaire pour décomposer son unité de poids; on reconnaît sans peine que l'on a

$$nA\varepsilon' i q' = i^2(R + nR' + \Sigma_1 R_\nu) + \Sigma_1 A\varepsilon_\nu i q_\nu,$$

d'où

$$i = \frac{A(n\varepsilon' q' - \Sigma_1 \varepsilon_\nu q_\nu)}{R + nR' + \Sigma_1 R_\nu}. \tag{20}$$

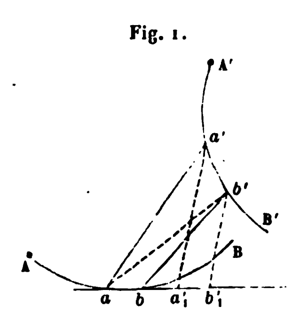
Pour que le courant se produise, il faut que $An\varepsilon' q' > \Sigma_1 A\varepsilon_\nu q_\nu$ ou que l'action chimique de la pile soit supérieure à la somme des actions chimiques des électrolytes.

§ IV. — De l'induction électrique.

10. *Différentes formes sous lesquelles on peut mettre la formule d'Ampère* (¹). — Soient (*fig.* 1)

AB, A′B′ deux courants électriques;

Fig. 1.



A, A′ deux points déterminés de ces courants, qui sont censés se produire de A vers B et de A′ vers B′;

a, *a′* deux points quelconques de AB, A′B′;

s, *s′* les longueurs d'arc A*a*, A′*a′*;

(¹) *Voir* nos *Recherches sur l'Électrodynamique*.

$ab = ds$, $a'b' = ds'$ les deux éléments de courant correspondant à a et a';

r la distance aa';

α, α' les angles formés par ab, $a'b'$ avec aa' et $a'a$;

θ l'angle compris sous les deux plans $a'ab$, $aa'b'$;

i, i' les intensités des courants AB, A'B';

ε l'angle formé par ab avec $a'b'$.

Nous pouvons considérer r, α, α', θ et ε comme étant des fonctions de s et s'.

Nous avons trouvé, pour l'expression de l'action mutuelle de deux courants,

$$(1)\qquad \psi = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{2} + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta\right).$$

Une parallèle en a à $a'b'$, le prolongement de $a'a$ et la direction de ab déterminent un angle trièdre qui conduit à la relation

$$\cos\varepsilon = -\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta,$$

et l'expression (1) peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \psi = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\varepsilon\right).$$

Nous avons vu que l'on avait aussi l'expression plus simple

$$(3)\qquad \psi = \frac{ii'ds\,ds'}{2\cos\alpha}\,\frac{d\dfrac{\cos^2\alpha}{r}}{ds'},$$

ou, en développant,

$$\psi = ii'\,\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(-\frac{\cos\alpha}{2}\,\frac{dr}{ds'} + r\frac{d\cos\alpha}{ds'}\right);$$

mais on a

$$\cos\alpha = -\frac{dr}{ds},$$

par suite,

$$(4)\qquad \psi = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right).$$

Si l'on pose $r = z^2$, $\frac{dr}{ds} = u$, on reconnaît facilement que le facteur en r de cette expression devient

$$-\frac{1}{2}\frac{d\frac{u}{z}}{ds'} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d}{ds'}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dr}{ds} = -\frac{2}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

Nous avons donc enfin

$$(5)\qquad \psi = -\frac{2\,ii'ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

11. *Formules de Weber*. — Dès 1822, Ampère [1] avait émis l'idée que l'on pourrait se rendre compte de la loi relative à l'action mutuelle de deux éléments de courant, en supposant que deux particules électriques m, m' s'attirent ou se repoussent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance, à la condition de faire intervenir un coefficient égal à l'unité augmentée d'un terme U qui ne dépend que du mouvement relatif de m et m'; ce qui revient à représenter l'action mutuelle de m, m' par

$$x = -\frac{mm'}{r^2}(1 + U),$$

en continuant à considérer une attraction comme positive.

Ampère est resté à cette conception philosophique sans la développer. Gauss l'a reprise plus tard et a admis que U est composé de deux termes, l'un proportionnel au carré de la vitesse relative de m et m',

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1823.

l'autre au carré de la composante $\frac{dr}{dt}$ suivant mm' de cette vitesse, les coefficients des deux termes pouvant d'ailleurs dépendre de r. L'hypothèse de Gauss doit être rejetée, parce qu'elle conduit à des résultats inadmissibles au point de vue de l'expérience.

En considérant le cas de deux éléments de courant situés dans le prolongement l'un de l'autre, Weber a été conduit à admettre que U renferme un terme qui dépend de la vitesse relative estimée suivant r, et il a supposé que ce terme, à un coefficient près, est de la forme $\frac{dr^2}{dt^2}$. Examinant ensuite le cas de deux éléments perpendiculaires à une droite, il est arrivé à conclure que U doit renfermer aussi un terme proportionnel à l'accélération relative $\frac{d^2r}{dt^2}$, estimée suivant r. C'est ainsi qu'il a été amené à poser généralement

$$x = -\frac{mm'}{r^2}\left(1 + \alpha\frac{dr^2}{dt^2} + \beta\frac{d^2r}{dt^2}\right), \tag{6}$$

α et β désignant des fonctions de r qui doivent être déterminées de manière que les résultats auxquels conduit cette formule soient d'accord avec la formule d'Ampère.

Soient v, v' les vitesses de m, m' qui sont censées des fonctions des trois variables s, s', t; ds, ds' les chemins parcourus par ces points dans l'élément de temps dt. Nous avons, en employant la caractéristique ∂, pour les dérivées partielles, à la place de celle d qui est réservée aux dérivées totales,

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
&v = \frac{ds}{dt},\quad v' = \frac{ds'}{dt},\\
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t},\\
\frac{d^2r}{dt^2} &= v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}\\
&\quad + v\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (6), et posant

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = 1 + \alpha \dfrac{\partial r^2}{\partial t^2} + \beta \dfrac{\partial^2 r}{dt^2}, \\ \mathcal{B} = \alpha \dfrac{\partial r^2}{\partial s^2} + \beta \dfrac{\partial r^2}{\partial s^2}, \quad \mathcal{B}' = \alpha \dfrac{\partial r^2}{\partial s'^2} + \beta \dfrac{\partial^2 r}{\partial s'^2}, \\ \mathcal{C} = 2\left(\alpha \dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial s'} + \beta \dfrac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right), \\ \mathcal{D} = 2\alpha \dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial r}{\partial s}, \quad \mathcal{D}' = 2\alpha \dfrac{\partial r}{\partial s'}\dfrac{\partial r}{\partial t} + \beta \dfrac{dv'}{dt}\dfrac{\partial r}{\partial s'}, \\ \mathcal{E} = \beta \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial r}{\partial s}, \quad \mathcal{E}' = \beta \dfrac{\partial v'}{\partial t}\dfrac{\partial s'}{\partial r}, \end{cases}$$

on trouve

$$(8)\quad \chi = -\frac{mm'}{r^2}(\mathcal{A} + \mathcal{B}v^2 + \mathcal{C}vv' + \mathcal{B}'v'^2 + \mathcal{D}v + \mathcal{D}'v' + \mathcal{E} + \mathcal{E}').$$

Supposons maintenant que les éléments de courant ds, ds' soient formés chacun d'un couple de particules électriques, savoir m, m_1 pour le premier élément et m', m'_1 pour le second. Soient v_1, v'_1 les vitesses de m_1, m'_1 qui peuvent être différentes de v, v'; $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{E}'_1$ les valeurs de $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$ quand on y remplace respectivement v par v_1 et v' par v'_1.

L'action mutuelle ψ de ds et ds' s'obtiendra en ajoutant l'expression (8) à celles qui en résultent quand on y remplace successivement m par m_1, m' par m'_1 et enfin m, m' par m_1, m'_1. On trouve ainsi

$$(9)\quad \begin{cases} \psi = -\dfrac{1}{r^2}\mathcal{A}(m + m_1)(m' + m'_1) + \mathcal{B}(m' + m'_1)(mv^2 + m_1 v_1^2) \\ \quad + \mathcal{B}'(m + m_1)(m'v'^2 + m'_1 v'_1)^2 + \mathcal{C}(mv + m_1 v_1)(m'v' + m'_1 v'_1) \\ \quad + \mathcal{D}\, m(m' + m'_1)v + \mathcal{D}_1 m_1(m' + m'_1)v_1 + \mathcal{E}(m' + m'_1)m + \mathcal{E}_1(m' + m'_1)m \\ \quad + \mathcal{D}'m'(m + m_1)v' + \mathcal{D}'_1 m'_1(m + m_1)v'_1 + \mathcal{E}'(m + m_1)m' + \mathcal{E}'_1(m + m_1)m' \end{cases}$$

En comparant ce résultat à la formule (4), on voit que, à l'exception du terme en $\mathcal{C}$, tous les autres doivent disparaître, condition à

sitif, l'autre au fluide négatif, et qui ont chacun pour intensité la moitié de celle du courant complet.

On s'assurera facilement que la force x dérive d'un potentiel et que ce potentiel a pour expression

$$\varphi = \frac{mm'}{r}\left[1 - \frac{1}{4a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]. \tag{16}$$

12. *Potentiel de l'action mutuelle de deux éléments de courant.* — En se reportant à la troisième formule (a), on a

$$mm'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = mm'\left(v^2\frac{\partial r^2}{\partial s^2} + v'^2\frac{\partial r^2}{\partial s'^2} + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + 2v\frac{\partial r}{\partial t} + 2v'\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r^2}{\partial t^2}\right).$$

Remplaçons dans cette expression m par m' puis m par m_1, enfin m, m' par m_1, m'_1. Faisons la somme des expressions ainsi obtenues, puis supposons dans cette somme $m_1 = -m$, $m'_1 = -m'$; on reconnaît facilement qu'elle se réduit à

$$8mm'vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Le potentiel cherché Φ ou la somme des expressions (16) pour les quatre couples de molécules a ainsi pour expression

$$\Phi = -2\frac{mm'vv'}{a^2 r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

ou, en vertu des relations (15),

$$\Phi = -\frac{1}{4}\frac{ii'ds\,ds'}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}. \tag{17}$$

13. *Potentiel total relatif à deux courants fermés d'intensités constantes agissant l'un sur l'autre.* — Ce potentiel, que l'on appelle aussi l'*énergie potentielle* des deux circuits, a pour expression

$$\Theta = -\frac{ii'}{4}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds\,ds'. \tag{18}$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds' = -\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}ds' = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) + \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}ds'.$$

De ce que le courant AB est fermé, le premier terme de cette expression est nul; on a donc simplement

$$\Theta = -\frac{ii'}{4}\int\int \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Soient (*fig.* 1) a'_1, b'_1 les projections de a', b' sur la direction de ab; il vient, en conservant les notations du n° **1**,

$$aa'_1 = r\cos\alpha, \quad ab'_1 = r\cos\alpha + \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'}ds', \quad a'_1 b'_1 = \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'}ds',$$

$$a'_1 b'_1 = ds'\cos\varepsilon, \quad \cos\alpha = -\frac{\partial r}{\partial s};$$

d'où

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'},$$

et enfin

$$(19) \qquad \Theta = \frac{ii'}{4}\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

formule qui est due à F.-E. Neumann.

14. *Force électromotrice d'un courant induit produit dans un* (
par un courant extérieur. — Soient A'B' le courant et AB le circuit
lequel se développe le courant induit.

L'accélération tangentielle, ou suivant ab, de la particule m prodı
par les actions de m, m'_1 s'obtiendra en faisant dans la formule (ç
$m = 1$, $m'_1 = -m'$, $v'_1 = -v'$ et multipliant le résultat par $\cos\alpha = -\frac{\partial\imath}{\partial}$
ce qui donne

$$\frac{m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\left[2Cvv' + (\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1)v' + \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_1\right].$$

L'accélération semblable de m_1 se déduira de cette expression en y remplaçant v par $v_1 = - v$, et, comme elle est de sens contraire à la précédente, elle devra lui être ajoutée pour avoir l'accélération relative η de m par rapport à m'; on trouve ainsi

$$\eta = 2 \frac{m'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} [(\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1) v' + \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_1].$$

Mais, en se reportant aux formules (7) et remarquant que $v'_1 = - v'$, on a

$$\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1 = 4 \alpha \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_1 = 2 \beta \frac{\partial r'}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'},$$

d'où

$$\eta = \frac{4 m'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \left(2 \alpha v' \frac{\partial r}{\partial t} + \beta \frac{\partial v'}{\partial t} \right),$$

et, en remplaçant α, β, $m'v'$ par leurs valeurs déduites des équations (12) et (15),

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{1}{r^2} \left(- i' \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{r \, \partial i'}{\partial t} \right) ds' = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial \frac{i'}{r}}{\partial t} ds'.$$

Nous avons donc, pour la force électromotrice totale développée dans le courant AB, en remarquant que i' seul est fonction du temps,

$$E = \int \eta \, ds = \frac{\sqrt{2}}{a} \int \int \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial \frac{i'}{r}}{\partial t} ds \, ds' = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{di'}{dt} \int \int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} ds \, ds',$$

ou, d'après le numéro précédent,

$$(20) \qquad E = - \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{di'}{dt} \int \int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds \, ds'.$$

Tel est le résultat cherché.

MAGNÉTISME STATIQUE.

MAGNÉTISME STATIQUE.

§ I. — Préliminaires.

1. Pour expliquer les propriétés magnétiques de certains corps ([1]), Coulomb considère les éléments matériels du corps comme renfermant en quantités égales et indéfinies deux fluides, l'un dit *boréal* ou *positif*, l'autre *austral* ou *négatif*.

En admettant que le corps soit soustrait à toute action capable de développer ses propriétés magnétiques, ces deux fluides se trouvent à l'état de combinaison ou se neutralisent dans la molécule matérielle correspondante. Mais, dès que le corps devient un aimant, les deux fluides se trouvent séparés, en quantités égales, et restent isolés pendant toute la durée de l'aimantation.

Par une extension donnée aux lois déduites de l'expérier Coulomb, on est conduit à admettre que deux particules mag se repoussent ou s'attirent proportionnellement à leurs masse. qu'elles sont ou non de même nature, et que leur action mutuel en raison inverse du carré de leur distance.

Nous conviendrons de considérer une répulsion comme une f

([1]) Les oxydes de fer et principalement l'oxydule, le fer, le nickel à la te rature de 20°.

positive et, par suite, d'attribuer une valeur négative à la masse d'une particule du fluide austral.

Un barreau d'acier trempé, convenablement orienté, devient au bout d'un certain temps, sous l'influence de la Terre, un aimant permanent, ce qui revient à dire que, lorsqu'il est soustrait à l'action magnétique, les deux fluides n'arrivent à se neutraliser que partiellement. Coulomb attribue cette opposition à la reconstitution du fluide neutre à une résistance passive à laquelle il a donné le nom de *force coercitive*, force sur la nature de laquelle on ne peut faire que des conjectures. Le barreau, dans certaines conditions, peut devenir un aimant permanent sous l'action d'un aimant permanent.

L'oxydule de fer est doué de la force coercitive et l'on attribue ses propriétés magnétiques à ce que les filons qui le renferment sont compris sensiblement dans les plans qui passent par les pôles magnétiques de la Terre.

Le fer doux et l'acier non trempé ne possèdent pas la propri té due à la force coercitive; l'aimantation cesse en même temps que l'influence de l'aimant qui l'a produite. On considère un aimant comme étant formé de petites parties matérielles qui ont reçu le nom d'*éléments magnétiques* et dans lesquelles la séparation des fluides s'est opérée. En faisant le même raisonnement que pour l'électricité statique, on arrive à conclure que l'action magnétique sur un point intérieur de l'élément est nulle, et que, par suite, les deux fluides séparés se sont portés sur sa surface. La forme des éléments magnétiques peut d'ailleurs dépendre de la manière dont l'aimantation a été produite.

Coulomb admet que les deux fluides, après leur séparation, se sont respectivement concentrés en deux points ou *pôles* de la surface de l'élément. L'hypothèse d'Ampère, dans laquelle les éléments magnétiques sont remplacés par des solénoïdes infinitésimaux, revient, au point de vue de la mise en équation, à celle de Coulomb.

Poisson (¹) n'a recours à aucune supposition sur le mode de répartition des deux fluides sur la surface de l'élément. Nous reconnaîtrons plus loin que, en se plaçant respectivement aux points de vue de Coulomb

---

(¹) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1822.

et de Poisson, on arrive aux mêmes résultats en ce qui concerne l'action exercée par un aimant sur un point extérieur.

Dans son *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme* (¹), G. Green ne mentionne pas les recherches de Poisson sur le magnétisme. Qu'il les ait ou non ignorées, il est arrivé à la même équation que Poisson relativement à l'équilibre magnétique intérieur d'un aimant. L'analyse de Green est assez obscure et paraît avoir pour objet plutôt de déguiser que de faire disparaître une difficulté éludée par Poisson, à l'aide de considérations particulières qui ne sont pas des plus satisfaisantes.

L'exposition de la théorie du magnétisme de M. W. Thomson se trouvant implicitement comprise dans le premier Mémoire de Poisson, nous n'avons pas à nous y arrêter.

Nous ne nous occuperons pas d'ailleurs de l'étude des feuillets magnétiques, qui n'offre aucun intérêt au point de vue des phénomènes physiques; nous ne considérerons que des aimants doués de force coercitive (²).

§ II. — Équations générales.

2. *De l'action exercée par un aimant sur un point qui n'est pas compris dans la masse.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; x, y, z les coordonnées de la particule magnétique M sur laquelle l'aimant exerce son action.

(¹) Nottingham, 1828.

(²) Green paraît être le seul géomètre qui ait cherché à expliquer les effets de la force coercitive en se plaçant dans le cas d'un fil d'acier trempé, étudié expérimentalement par Coulomb.

Il est arrivé à une formule qui cadre, presque aussi bien que la formule d'interpolation de Biot, avec les résultats des observations de Coulomb.

Si nous ne reproduisons pas la théorie de Green, c'est par la raison qu'elle pèche par plusieurs points que nous allons faire ressortir. Il suppose que la force coercitive est constante et qu'elle se développe parallèlement à l'aiguille cylindrique dans un sens déterminé, ce qui nous paraît inadmissible; car cette force, devant changer de signe en passant d'une moitié à l'autre de l'aiguille, doit être nulle au milieu.

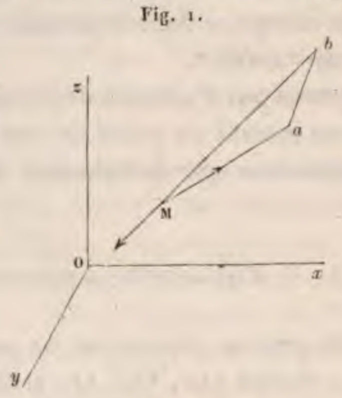
Par un artifice de calcul, justifié ultérieurement par une application ingénieuse

Pour simplifier, nous supposerons que la masse de cette particule est égale à l'unité, sauf à multiplier ultérieurement, s'il y a lieu, les résultats auxquels nous parviendrons par la valeur positive ou négative de la masse M. D'après cette convention, une particule magnétique *m* sera censée exercer sur M une répulsion ou une attraction, selon qu'elle appartiendra au fluide boréal ou au fluide austral.

Nous allons maintenant chercher à déduire successivement des conséquences des hypothèses de Coulomb et de Poisson sur la constitution d'un aimant.

(*a*) *D'après les idées de Coulomb.* — Soient (*fig.* 1)

Fig. 1.



a, *b* les pôles austral et boréal d'un élément magnétique de l'aimant (A);

ds sa longueur;

---

de la méthode des moindres carrés, il fait sortir d'une intégrale définie, fort embarrassante, le facteur inconnu qui se rapporte à l'action exercée sur un point déterminé de l'aimant.

Par un raisonnement insaisissable, il supprime deux termes importants de son équation fondamentale et s'impose deux conditions relatives aux extrémités de l'aiguille, qui consistent chacune en une équation dont le premier membre est la somme de deux fonctions homogènes qui ne sont pas du même degré, ce qui n'est pas non plus admissible.

Il paraîtrait assez naturel de supposer que la force coercitive en un point est proportionnelle à l'intensité magnétique en ce point; et alors l'équation de Green, débarrassée des deux termes dont on vient de parler et sans avoir égard aux conditions aux extrémités qu'il s'est imposées, conduit à la formule de Biot.

ν la valeur absolue de chacune des masses magnétiques condensées en a et b;
x', y', z' les coordonnées du point a;
$u' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ la distance $\overline{Ma}$;
$u' + \frac{du'}{ds} ds$ la distance $\overline{Mb}$.

Les fonctions potentielles de M dues à a et b étant respectivement

$$\frac{\nu}{u'}, \quad -\nu\left(\frac{1}{u'} + \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} ds\right),$$

celle à laquelle donne lieu l'élément a pour valeur

$$(a) \qquad -\nu \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} ds.$$

On donne le nom d'*intensité magnétique linéaire de l'élément* à l'expression

$$(b) \qquad I' = \nu \frac{ds}{dv'},$$

dans laquelle dv' représente le volume de l'élément.

Cette intensité pouvant être considérée comme une force dirigée du pôle austral a vers le pôle boréal b, nous désignerons par α', β', γ' ses composantes parallèles à Ox, Oy, Oz.

L'expression (a) prend la forme [1]

$$-I' \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} dv',$$

et nous avons, pour la fonction potentielle de M due à l'action totale

---

[1] En prenant la dérivée par rapport à x, on trouve pour la composante, paral-

de (A),

$$Q = -\int \mathrm{I}'dv'\,\frac{d\frac{1}{u'}}{ds} = -\int \mathrm{I}'dv'\left(\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}\frac{dx'}{ds} + \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}\frac{dy'}{ds} + \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\frac{dz'}{ds}\right),$$

---

lèle à Ox, de l'action exercée par ab sur M,

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} \chi &= -\mathrm{I}'dv'\,\frac{d}{ds}\left(\frac{x'-x}{u'^3}\right) = -\mathrm{I}'\frac{dv'}{u'^3}\left[-3\,\frac{(x'-x)}{u'}\frac{du'}{ds} + \frac{dx'}{ds}\right] \\ &= \mathrm{I}'\frac{dv'}{u'^3}\,[3\cos(u', ds)\cos(u', x) - \cos(ds, x)]. \end{aligned}\right.$$

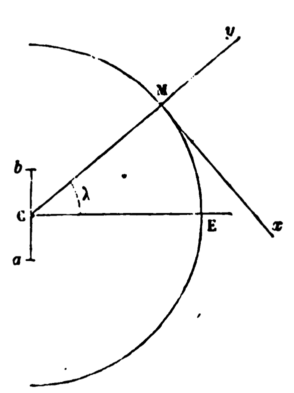
On a des expressions semblables pour les composantes η, ζ, suivant Oy, Oz, et l'on trouve facilement pour la résultante

$$\mathrm{I}'\frac{dv'}{u'^3}[3\cos^2(u', ds) + 1].$$

Pour se rendre compte du pouvoir magnétique de la Terre, Biot suppose qu'elle possède deux pôles magnétiques situés sur un même diamètre, à égale distance du centre, possédant les mêmes pouvoirs attractifs et répulsifs et dont la distance est très petite par rapport au rayon terrestre.

Supposons que a, b (*fig.* 2) soient les pôles magnétiques austral et boréal de

Fig. 2.



la Terre dont C est le centre, et que M soit l'un des pôles d'une aiguille aimantée placée à la surface du globe.

Prenons pour plan de la figure le méridien magnétique de M, c'est-à-dire le

ou

$$(c) \qquad Q = -\int dv' \left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta' \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'} \right),$$

expression dans laquelle nous pouvons considérer maintenant x', y', z' comme étant les coordonnées du milieu C de ab.

Concevons autour de ce point un volume dw extrêmement petit par rapport au volume de (A), mais cependant assez étendu pour contenir un grand nombre d'éléments magnétiques, et désignons par k' le rapport de la somme des volumes de ces éléments à dw. Ce rapport, qui atteindra au plus l'unité, sera spécifique pour un corps aimanté

---

plan déterminé par ce point et ab; pour partie positive de l'axe des y, le prolongement de CM, et pour axe des x la portion de la méridienne de M dirigée vers l'équateur. Soit λ la latitude magnétique de M ou le complément de l'angle formé par CM avec ab.

Nous avons, en considérant u' comme se rapportant au point C,

$$\zeta = 0,\ \cos(u', ds) = \sin\lambda,\ \cos(u', x) = 0,\ \cos(ds, x) = -\cos\lambda,$$
$$\cos(u', y) = 1,\ \cos(ds, y) = \sin\lambda.$$

L'équation (α) et celle qui en dérive pour l'axe des y donnent, en ayant égard à la formule (b), pour les composantes de l'action exercée par la Terre sur M suivant Mx, My,

$$\chi = \frac{\nu\, ds}{u'^3}\cos\lambda, \qquad \tau_1 = \frac{2\, ds}{u'^3}\sin\lambda,$$

d'où

$$\frac{\tau_1}{\chi} = 2\tan\lambda.$$

Pour le second pôle de l'aiguille, τ_1 et χ seront changés de signe. L'aiguille étant censée en équilibre, la ligne des pôles sera dirigée suivant la résultante de τ_1 et χ : si donc i désigne l'inclinaison magnétique au lieu considéré, nous aurons

$$\tan i = 2\tan\lambda.$$

porté à une température uniforme déterminée, mais variera d'un point à un autre de ce corps si la température est elle-même variable, comme nous le supposerons pour plus de généralité, k' devenant ainsi une fonction donnée de x', y', z'. Quoique le volume dv soit censé extrêmement petit, les quantités α', β', γ', k' n'auront pas les mêmes valeurs dans toute son étendue, si les éléments magnétiques qu'il renferme n'ont pas tous la même forme, ou si, quoique identiques, ils ne sont pas régulièrement disposés. Nous les supposerons néanmoins constantes dans le volume considéré en leur attribuant des valeurs moyennes qui seront censées soumises à la loi de continuité et par suite exprimables en fonction de x', y', z'.

Nous pouvons dès lors supposer que, dans la formule (c), dv' représente la somme des volumes des éléments magnétiques contenus dans dv, et alors nous obtenons

$$Q = -\int k'\left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta' \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right) dv,$$

et, comme l'intégrale doit être étendue au volume de (A), on est ramené à poser

$$(1) \qquad Q = -\int\int\int k'\left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta' \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right) dx'\, dy'\, dz'.$$

(b). *D'après Poisson.* — Soient (*fig.* 3)

x', y', z' les coordonnées d'un point C situé dans l'intérieur d'un élément magnétique de (A);

c le côté du cube équivalent au volume de cet élément;

$x' + c\chi$, $y' + c\eta$, $z' + c\zeta$ les coordonnées d'un point m de la surface du même élément;

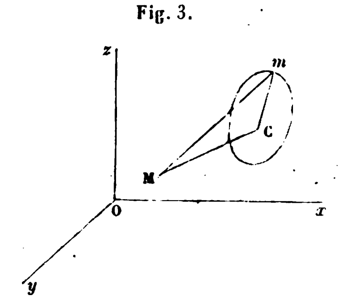
e, ρ l'épaisseur normale et la densité relative correspondante du fluide magnétique;

$c^2 ds$ un élément superficiel en m;

$u' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ la distance MC.

Comme l'action de m sur M est une répulsion ou une attraction selon

Fig. 3.



que ρ est positif ou négatif, la fonction potentielle de M due à l'élément magnétique a pour expression

$$(d) \qquad -c^2 \int \rho e \frac{ds}{\overline{\mathrm{M}m}},$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'élément.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, comme il y a autant de fluide positif que de fluide négatif sur l'élément, on a

$$(2) \qquad \int \rho e\, ds = 0.$$

En admettant que M soit suffisamment éloigné de C pour que l'on puisse négliger les puissances de $\frac{c\chi}{u}$, $\frac{c\eta}{u}$, $\frac{c\zeta}{u}$ d'un ordre supérieur au premier, nous avons

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{M}m}} = \frac{1}{u'} + c\left(\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}\chi + \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}\eta + \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\zeta\right).$$

Si nous posons

$$(3) \qquad \alpha' = \int \chi e\rho\, ds, \quad \beta' = \int \eta e\rho\, ds, \quad \gamma' = \int \zeta e\rho\, ds,$$

et si nous avons égard à la relation (2), l'expression (d) devient

$$(e) \qquad -c^3\left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta' \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right).$$

Les valeurs (3) sont indépendantes de la position du point C dans l'intérieur de l'élément considéré ; car, en passant d'une position à une autre, les coordonnées relatives χ, η, ζ ne varient que de quantités constantes qui, d'après la formule (2), donnent des résultats nuls.

Si nous représentons par dv' le volume c^3 de l'élément magnétique, on voit que la formule (c) nous conduira identiquement à l'expression (e) de la fonction potentielle de M due à (A) et enfin, à la suite d'un raisonnement qu'il est inutile de reproduire, à l'équation (1).

En considérant les quantités α', β', γ' comme définies par les formules (3) et se reportant à l'article précédent, on voit qu'un élément magnétique de (A) agira sur M de la même manière qu'une aiguille infinitésimale qu'on lui substituerait et qui ferait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus seraient

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}, \quad \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}, \quad \frac{\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}.$$

D'après ce qui précède, il n'y a plus aucun motif pour préférer la manière de voir de Coulomb à celle de Poisson, qui sera seule en question dans ce qui suit, tout en conservant à la résultante de α', β', γ' le nom d'*intensité magnétique linéaire*.

Les composantes parallèles à Ox, Oy, Oz de l'action exercée par (A) sur M ont pour expressions, comme on le sait,

$$(4) \qquad X = \frac{dQ}{dx}, \quad Y = \frac{dQ}{dy}, \quad Z = \frac{dQ}{dz}.$$

3. *Autre forme sous laquelle on peut mettre la fonction* Q. — En intégrant par parties, l'équation (1) donne

$$Q = -\int\int\int \left(\frac{d\frac{\alpha' k'}{u'}}{dx'} + \frac{d\frac{\beta' k'}{u'}}{dy'} + \frac{d\frac{\gamma' k'}{u'}}{dz'} \right) \frac{dx'\,dy'\,dz'}{u'}$$
$$+\int\int\int \frac{1}{u'}\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'} + \frac{d\beta' k'}{dy'} + \frac{d\gamma' k'}{dz'} \right) dx'\,dy'\,dz'$$

ou, en vertu d'un théorème connu,

$$(5) \quad \begin{cases} Q = -\int (\alpha' \cos l' + \beta' \cos m' + \gamma' \cos n') k' \dfrac{d\omega'}{u'} \\ \qquad + \int\int\int \dfrac{1}{u}\left(\dfrac{d\alpha' k'}{dx'} + \dfrac{d\beta' k'}{dy'} + \dfrac{d\gamma' k'}{dz'} \right) dx'\,dy'\,dz', \end{cases}$$

en désignant par $d\omega'$ un élément de la surface de (A) au point M′ dont les coordonnées sont x', y', z' et par l', m', n' les angles formés par la normale extérieure à cet élément avec Ox, Oy, Oz.

On remarquera que le facteur de $k'\frac{d\omega'}{u'}$ dans la première intégrale n'est autre chose que la composante I'_n suivant la normale en M′ de l'intensité magnétique en ce point (n° 2).

De la formule précédente et de l'identité

$$\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2}=0,$$

on déduit l'équation connue

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}+\frac{d^2Q}{dz^2}=0. \tag{6}$$

A l'inspection de l'équation (5), on reconnaît que l'aimant (A) agit sur M comme si la surface était recouverte d'un fluide dont la densité superficielle serait $I'_n k'$, et que les molécules renfermeraient un autre fluide dont la densité de masse aurait pour valeur

$$-\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'}+\frac{d\beta' k'}{dy'}+\frac{d\gamma' k'}{dz'}\right).$$

4. *Action d'un corps aimanté sur un point intérieur de l'un de ses éléments magnétiques.* — Concevons une sphère (B) ayant son centre en M, dont le rayon est extrêmement petit par rapport aux dimensions de l'aimant, mais qui est censée assez étendue cependant pour renfermer un grand nombre d'éléments magnétiques.

Les composantes de l'action exercée sur M par la portion de (A) extérieure à (B) pourront se déterminer au moyen des formules (1) et (4), parce que le développement sur lequel elles reposent est ici parfaitement admissible. Mais il n'en est pas de même pour celles de (B) qui exigent un calcul spécial, puisque u' est de l'ordre de ds, $c\chi$, $c\eta$, $c\zeta$.

Occupons-nous d'abord de l'action exercée sur M par la portion

de (A) extérieure à (B); on peut supposer que Q s'étende au volume entier en retranchant ensuite de $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ les composantes X', Y', Z' dues à (B), estimées au moyen des formules (1) et (4).

Nous avons

$$X' = -\int\int\int\left(\alpha'\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d}{dy}\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d}{dz}\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)k'\,dx'\,dy'\,dz'.$$

En raison des dimensions extrêmement petites du volume (B), on peut considérer $\alpha', \beta', \gamma', k'$ comme ayant les mêmes valeurs dans toute l'étendue de ce volume. Si donc nous désignons par α, β, γ, k celles de ces valeurs qui correspondent au point M, c'est-à-dire aux coordonnées x, y, z, nous aurons

$$\begin{aligned} X' = &-\alpha k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}dx'\,dy'\,dz' \\ &-\beta k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}dx'\,dy'\,dz' - \gamma k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}dx'\,dy'\,dz' \end{aligned}$$

ou, en effectuant les différentiations par rapport à x,

$$\begin{aligned} X' = &-\alpha k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dx'}dx'\,dy'\,dz' \\ &-\beta k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dy'}dx'\,dy'\,dz' - \gamma k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dz'}dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned}$$

En étendant à la surface de (B) les notations admises pour celle de (A), cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X' = &-\alpha k\int\frac{(x'-x)}{u'^3}\cos l'\,d\omega' \\ &-\beta k\int\frac{(y'-y)}{u'^3}\cos m'\,d\omega' - \gamma k\int\frac{(z'-z)}{u'^3}\cos n'\,d\omega; \end{aligned}$$

et comme

$$x' - x = u' \cos l', \quad y' - y = u' \cos m', \quad z' - z = u' \cos n',$$

il vient

$$X' = -\alpha k \int \frac{(x'-x)^2}{u'^4} d\omega'$$
$$- \beta k \int \frac{(x'-x)(y'-y)}{u'^4} d\omega' - \gamma k \int \frac{(x'-x)(z'-z)}{u'^4} d\omega'.$$

Concevons, momentanément, que les axes coordonnés soient transportés parallèlement à eux-mêmes au point M pris pour origine; soient θ et ψ les angles formés par u' avec Mz et sa projection sur le plan xMy avec Mx; nous avons

$$x' - x = u' \sin\theta \cos\psi, \quad y' - y = u' \sin\theta \sin\psi, \quad z' - z = u' \cos\theta,$$
$$d\omega' = u'^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

et

$$X' = -\alpha k \int\int \sin^3\theta \cos^2\psi \, d\theta \, d\psi - \beta k \int\int \sin^3\theta \sin\psi \cos\psi \, d\theta \, d\psi$$
$$- \gamma k \int\int \sin^2\theta \cos\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi,$$

les intégrales étant prises entre les limites $\theta = 0$, $\psi = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 2\pi$. On tire de là

$$X' = -\frac{4}{3}\pi\alpha k,$$

et l'on trouverait de même

$$Y' = -\frac{4}{3}\pi\beta k, \quad Z' = -\frac{4}{3}\pi\gamma k.$$

Nous avons donc, pour les composantes de l'action sur M par la portion de l'aimant extérieur à (B),

$$(7) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{dQ}{dx} + \dfrac{4}{3}\pi\alpha k, \\ Y_1 = \dfrac{dQ}{dy} + \dfrac{4}{3}\pi\beta k, \\ Z_1 = \dfrac{dQ}{dz} + \dfrac{4}{3}\pi\gamma k. \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à déterminer les composantes de l'action exercée par la sphère (B) sur le point M.

Concevons un cône ayant son sommet en ce point, d'une ouverture sphérique infiniment petite $d\sigma$ et terminé à la surface de (B). Une masse fluide élémentaire $\rho r^2 d\sigma dr$, comprise dans ce cône et située à la distance r du sommet, donnera lieu à l'action $\rho d\sigma dr$, et l'on aura $d\sigma \int \rho dr$ pour l'action du cône entier. L'action produite par le cône opposé sera de sens contraire à cette dernière et ces deux actions se détruiront au moins en partie. Comme les deux cônes ont la même longueur, ils traverseront à peu près le même nombre d'éléments magnétiques extérieurs à celui auquel M appartient, et la surface de chacun de ces éléments sera traversée deux fois. Quoique ces éléments ne soient pas nécessairement identiques, comme leur nombre est très grand et pour ainsi dire infini, il n'y a pas de raison de supposer qu'il y a plus de fluide libre d'un côté que de l'autre. Alors il ne restera de l'action des cônes que celle qui est due aux portions qu'ils déterminent dans la couche fluide de l'élément dans l'intérieur duquel M est situé. Il suit de ce raisonnement que, si ce point était extérieur à tout élément magnétique, il ne serait soumis à aucune action magnétique de la part de (B), c'est-à-dire qu'une particule magnétique de l'un ou l'autre fluide que l'on placerait au même point y resterait en équilibre si elle n'était influencée que par (B).

Supposons, pour un instant, que l'on ait transporté les axes Ox, Oy, Oz parallèlement à eux-mêmes au point M.

Soient θ et ψ les angles formés par r avec Mz et sa projection sur le plan xMy avec Mx; ε l'épaisseur de la couche magnétique déterminée par la direction de r; on peut prendre $d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\psi$ et l'on reconnaît facilement que les composantes de l'action due à (B), parallèles à Ox, Oy, Oz, ont pour expressions

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\displaystyle\iint \rho\varepsilon \sin^2\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi, \\ \beta_1 = -\displaystyle\iint \rho\varepsilon \sin^2\theta \sin\psi \, d\theta \, d\psi, \\ \gamma_1 = -\displaystyle\iint \rho\varepsilon \sin\theta \cos\theta \, d\psi, \end{cases}$$

les intégrales étant prises entre les limites $\theta = 0$, $\psi = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 2\pi$. Nous rappellerons que nous avons désigné par α, β, γ les valeurs de α', β', γ' qui se rapportent aux point M.

En remontant au n° **2**, nous remarquerons que

$$ec^2 ds = \varepsilon\mathfrak{r}^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$
$$c\chi = \mathfrak{r}\sin\theta\cos\psi, \quad c\eta = \mathfrak{r}\sin\theta\sin\psi, \quad c\zeta = \mathfrak{r}\cos\theta;$$

d'où l'on déduit

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{c^3}\displaystyle\iint \rho\varepsilon\mathfrak{r}^3 \sin^2\theta\cos\psi \, d\theta \, d\psi, \\ \beta = \dfrac{1}{c^3}\displaystyle\iint \rho\varepsilon\mathfrak{r}^3 \sin^2\theta\sin\psi \, d\theta \, d\psi, \\ \gamma = \dfrac{1}{c^3}\displaystyle\iint \rho\varepsilon\mathfrak{r}^3 \sin\theta\cos\theta \, d\psi. \end{cases}$$

Poisson a supposé que α, β, γ sont des fonctions linéaires de α_1, β_1, γ_1 dont les coefficients ne dépendent que de la forme de l'élément magnétique et de sa position par rapport aux trois plans coordonnés. Par des transformations de coordonnées et en exprimant que α, β, γ ne changent pas de valeur, si l'aimant (A), étant une sphère homogène, tourne sur lui-même, il arrive à conclure que six des coefficients de α_1, β_1, γ_1 sont nuls, que les trois autres sont égaux et que l'on peut ainsi poser

$$\alpha = -p\alpha_1, \quad \beta = -p\beta_1, \quad \gamma = -p\gamma_1,$$

p étant une fonction inconnue; il cherche à déterminer cette fonction par une savante analyse où il fait intervenir les fonctions sphériques; il arrive à un résultat approximatif tel, qu'il a dû supposer en chemin que l'élément magnétique était sensiblement sphérique. En effet, en substituant à cet élément une sphère moyenne de rayon $\mathfrak{r}_1$, ayant le même volume, nous aurons

$$c^3 = \frac{4}{3}\pi\mathfrak{r}_1^3,$$

et, en faisant $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ dans les formules (9) et en ayant égard aux valeurs (8), on voit sans peine que l'on a

$$(10) \qquad \alpha_1 = -\frac{4}{3}\pi\alpha, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}\pi\beta, \quad \gamma_1 = -\frac{4}{3}\pi\gamma.$$

Telles sont les relations auxquelles Poisson est arrivé, quoique les raisonnements qui l'y ont conduit ne soient pas de la dernière rigueur (¹).

Il résulte de ce qui précède que les composantes de l'action totale exercée par l'aimant (A) sur un point intérieur de l'un de ses éléments magnétique sont pour expressions

$$(11)\qquad \begin{cases} X = \frac{dQ}{dx} - \frac{4}{3}\pi\alpha(1-k), \\ Y = \frac{dQ}{dy} - \frac{4}{3}\pi\beta(1-k), \\ Z = \frac{dQ}{dz} - \frac{4}{3}\pi\gamma(1-k). \end{cases}$$

5. *Équations d'équilibre des deux fluides contenus dans un corps aimanté.* — Supposons que les particules magnétiques de (A) soient soumises non seulement à leurs actions mutuelles, mais encore à celles d'aimants extérieurs. Désignons par V la fonction potentielle de M due à l'action de ces aimants.

Il faut que les forces magnétiques qui sollicitent le point M se fassent équilibre, car autrement il y aurait, en ce point, décomposition du fluide neutre, et l'équilibre magnétique dans (A) n'existerait pas, comme on l'a supposé; c'est pourquoi d'ailleurs on a admis, comme pour les fluides électriques, que le fluide magnétique était répandu sur la surface de chaque élément d'aimant.

On doit donc avoir, pour tous les points de l'intérieur de (A) ou quels que soient x, y, z,

$$X + \frac{dV}{dx} = 0, \quad Y + \frac{dV}{dy} = 0, \quad Z + \frac{dV}{dz} = 0,$$

(¹) Il le reconnaît lui-même dans son Mémoire de 1828 intitulé : *Sur la théorie du magnétisme en mouvement* (*Mémoires de l'Institut*, p. 454), Mémoire que nous n'analyserions qu'en sortant du cadre que nous nous sommes tracé. Il nous paraît cependant que l'on pourrait éluder les difficultés en multipliant les expressions (10) par un coefficient, probablement peu différent de l'unité, mais qui ne pourrait être qu'une donnée expérimentale.

d'où, pour les équations cherchées,

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} + \dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{4}{3}\pi\alpha(1-k) = 0, \\ \dfrac{dV}{dy} + \dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{4}{3}\pi\beta(1-k) = 0, \\ \dfrac{dV}{dz} + \dfrac{dQ}{dz} - \dfrac{4}{3}\pi\gamma(1-k) = 0. \end{cases}$$

On sait que, par sa nature, la fonction V satisfait à l'équation

$$(13)\qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

on a de plus

$$(f)\qquad \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = 0,$$

lorsque les différences $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ ne sont pas infiniment petites, et dans le cas contraire

$$(g)\qquad \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = -4\pi.$$

Si l'on forme au moyen de l'équation (5) du n° **3** l'expression

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2},$$

la somme des trois intégrales qui se rapportent à la surface de (A) est nulle; la somme des trois autres se réduit à celle qui est relative à une sphère d'un rayon infiniment petit enveloppant le point M et dans laquelle on peut supposer

$$\frac{d\alpha' k'}{dx'} = \frac{d\alpha k}{dx}, \quad \frac{d\beta' k'}{dy'} = \frac{d\beta k}{dy}, \quad \frac{d\gamma' k'}{dx'} = \frac{d\gamma k}{dx};$$

on obtient ainsi, eu égard à la relation (f),

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = -4\pi\left(\frac{d\alpha k}{dx} + \frac{d\beta k}{dy} + \frac{d\gamma k}{dz}\right).$$

Si donc on ajoute entre elles les équations (12), après les avoir différentiées respectivement par rapport à x, y, z, on trouve

$$(14)\qquad 2\left(\frac{d\alpha k}{dx}+\frac{d\beta k}{dy}+\frac{d\gamma k}{dz}\right)+\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

6. *Cas où la température de l'aimant est uniforme.* — Nous ne considérerons dorénavant que le cas dans lequel k est une constante (nº **2**).

L'équation précédente se réduit alors à la suivante :

$$(15)\qquad \frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

A l'inspection des équations (12), on reconnaît que α, β, γ sont les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une même fonction que nous désignerons par f. Nous aurons ainsi

$$(16)\qquad \alpha=\frac{df}{dx},\quad \beta=\frac{df}{dy},\quad \gamma=\frac{df}{dz},$$

et, au lieu de l'équation (15),

$$(17)\qquad \frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=0.$$

Les équations (12) se réduisent alors à la suivante :

$$(18)\qquad \mathrm{V}+\mathrm{Q}-\frac{4\pi}{3}(1-k)f=0 \quad [1],$$

d'où on les déduira par la différentiation relative aux trois coordonnées.

En vertu de l'équation (15) et en supposant k' ou k constant, la seconde intégrale de l'expression (5), (nº **3**) est nulle et l'on a sim-

---

[1] Cette équation n'est autre chose que celle qui a été reproduite par Green et à laquelle nous avons fait allusion au nº **1**.

plement

$$(19) \qquad Q = -k \int \left(\frac{df'}{dx'} \cos l' + \frac{df'}{dy'} \cos m' + \frac{df'}{dz'} \cos n' \right) \frac{d\omega'}{u'},$$

en désignant par f' ce que devient f quand on y remplace x, y, z par x', y', z'. La couche fictive superficielle dont nous avons parlé à la fin du n° **3** est donc tout ce qu'il reste de l'action exercée par (A) sur M.

Portons sur la normale extérieure au point M′ de la surface de (A) une longueur infiniment petite $M'M'_1 = dw'$, et soient $x' + dx', y' + dy'$, $z' + dz'$ les coordonnées de M'_1; comme on a

$$\cos l' = \frac{dx'}{dw'}, \quad \cos m' = \frac{dy'}{dw'}, \quad \cos n' = \frac{dz'}{dw'},$$

l'expression (19) se met alors sous la forme simple

$$(19') \qquad Q = -k \int \frac{df'}{dw'} \frac{d\omega'}{u'},$$

Comme les équations d'après lesquelles Q s'est réduit à l'expression (19) n'ont pas lieu pour les éléments magnétiques situés sur la surface de (A), ou qui en sont à une distance insensible, les valeurs de $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ ne comprendront pas l'action de ces éléments; mais on peut, sans erreur appréciable, négliger cette action ou la regarder comme insensible par rapport à celle de tous les éléments dont (A) est composé.

7. *Le volume renferme un vide à l'intérieur.* — On calculera d'abord Q comme si le volume était plein, et de l'expression obtenue on retranchera celle qui est relative au volume du vide intérieur considéré comme plein.

Supposons que les éléments qui entrent dans les formules (19) et (19′) se rapportent à la surface extérieure; augmentons d'un [illegible] les éléments correspondants qui sont relatifs à un point M″ de la surface intérieure. Nous aurons

$$(20) \qquad Q = -k \int \frac{df'}{dw'} \frac{d\omega'}{u'} + k \int \frac{df''}{dw''} \frac{d\omega''}{u''},$$

la premiere de ces intégrales s'étendant à la surface extérieure et la seconde à la surface intérieure.

Supposons que la fonction V se rapporte aux aimants extérieurs à (A), et que U soit son équivalent pour les aimants qui pourraient se trouver dans le vide; à l'équation (18) on devra substituer la suivante :

$$(21)\qquad V + U + Q - \frac{4\pi}{3}(1 - k)f = 0,$$

dans laquelle Q sera remplacé par sa valeur (20).

Plaçons l'origine O des coordonnées dans l'intérieur du vide, et soient r, le rayon vecteur OM; θ l'angle $\widehat{\mathrm{MO}z}$; ψ l'angle formé avec Ox par la projection de r sur le plan yOx; affectons d'un accent et de deux accents les quantités analogues qui se rapportent aux points M' et M'' de la surface extérieure et de la surface intérieure. Soient, de plus ϖ', ϖ'' des angles qui forment avec r', r'' les normales en M', M''; E', E'' les épaisseurs suivant les directions de r', r'' des couches fluides fictives répandues sur les surfaces extérieure et intérieure. Nous avons

$$(22)\quad \begin{cases} u^2 = r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')] + r'^2, \\ u'^2 = r^2 - 2rr''[\cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\psi - \psi'')] + r''^2, \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} d\omega'\cos\varpi' = r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi', \\ d\omega''\cos\varpi'' = r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'', \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} k\dfrac{df'}{dv'} = \mathrm{E}'\cos\varpi', \\ k\dfrac{df''}{dv''} = \mathrm{E}''\cos\varpi''. \end{cases}$$

Les formules (20) et (21) deviennent alors

$$(25)\quad Q = \iint \frac{1}{u'}\mathrm{E}'r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' - \iint \frac{1}{u''}\mathrm{E}''r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'',$$

$$(26)\quad \begin{cases} V + U - \frac{4}{3}\pi(1 - k)f - \iint \frac{1}{u'}\mathrm{E}'r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' \\ \qquad + \iint \frac{1}{u''}\mathrm{E}''r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'', \end{cases}$$

les intégrales étant prises entre $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$, $\psi' = 0$, $\psi'' = 0$ et $\theta' = \pi$, $\theta'' = \pi$, $\psi' = 2\pi$, $\psi'' = 2\pi$.

On sait d'ailleurs que, en substituant les coordonnés polaires aux coordonnés rectilignes, l'équation (17) se transforme dans la suivante :

$$(27) \qquad \frac{r\,d^2 rf}{dr^2} + \frac{d\left(\sin\theta \frac{df}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{df^2}{d\psi^2} = 0.$$

8. *Indications générales sur la marche à suivre pour arriver à l'intégration.* — Posons

$$(28) \qquad f = \sum\nolimits_{i=0} R_i,$$

R_i étant une fonction rationnelle entière du degré i, de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, dépendante de r, qui satisfait à l'équation

$$(29) \qquad \frac{d\sin\theta \frac{dR_i}{d\theta}}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2R_i}{d\psi^2} + i(i+1)R_i = 0.$$

En remplaçant f par R_i dans l'équation (27) et ayant égard à la précédente, on trouve

$$r\frac{d^2 rR_i}{dr^2} - i(i+1)R_i = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$R_i = H_i r^i + \frac{G_i}{r^{i+1}},$$

H_i, G_i étant des *fonctions* sphériques du degré i en θ et ψ, indépendantes de r, qui satisfont à l'équation (29) quand on les substitue à R_i. L'équation (27) sera donc satisfaite par

$$(30) \qquad f = \sum\left(H_i r^i + \frac{G_i}{r^{i+1}}\right).$$

Cela posé, on substituera à f cette valeur dans l'équation (26), ainsi que les expressions de u, u', V, U exprimées en séries convergentes ordon-

nées, selon les cas, suivant les puissances ascendantes ou descendantes de r, et l'on égalera à zéro la somme des coefficients des mêmes puissances de r. On déterminera ainsi les H_i, G_i, par suite f, puis α, β, γ, et enfin les composantes de l'action magnétique du corps au moyen de la quantité Q dont la valeur se déduira de celle de f par des intégrations immédiates.

§ III. — Application aux corps sphériques.

9. *Équilibre magnétique intérieur d'une enveloppe sphérique.* — Considérons une sphère creuse dont les rayons extérieur et intérieur soient a, b, et plaçons l'origine des coordonnées au centre O de cette sphère.

On a

$$dw' = dr', \quad dw'' = dr'';$$

par suite,

$$E' = k\frac{df'}{dr'}, \quad E'' = k\frac{df''}{dr''},$$

expressions dans lesquelles on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, après avoir effectué les différentiations.

Si nous distinguons par un accent et deux accents les valeurs que prennent H_i et G_i lorsque l'on y remplace θ, ψ par θ', ψ' et par θ'', ψ'', nous aurons, en vertu de l'équation (30) du n° **8**,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} E' &= k\sum\left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}}\right],\\ E'' &= k\sum\left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G''_i}{b^{i+2}}\right].\end{aligned}\right.$$

L'équation (26) du n° **7** prend alors la forme suivante :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} V + U &= \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum\left(H_i r_i + \frac{G_i}{r^{i+1}}\right)\\ &+ ka^2\int\int\frac{1}{u}\sum\left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_1}{a^{i+2}}\right]\sin\theta' d\theta' d\psi'\\ &+ kb^2\int\int\frac{1}{u'}\sum\left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G'_1}{b^{i+2}}\right]\sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = 0.\end{aligned}\right.$$

tivement développables suivant les puissances ascendantes et descendantes de r et nous pourrons écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} V = \sum V_i r_i, \\ U = \sum \dfrac{U_i}{r^{i+1}}, \end{cases}$$

V_i et U_i étant des fonctions sphériques du même ordre que H_i, G_i.

A mesure que r augmentera, U tendra à se réduire à son premier terme, mais, à la limite, cette fonction sera égale à la somme des quantités de fluide libre appartenant aux aimants intérieurs divisée par r et, comme cette somme est nécessairement nulle, on a $U_0 = 0$.

Portant les valeurs (5) dans l'équation (4) et égalant à zéro les coefficients de r^i, $\frac{1}{r^{i+1}}$, on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} V_i - \dfrac{4\pi}{3}(1-k)H_i - 4\pi k\,\dfrac{i}{2i+1}\,H_i + 4\pi k\,\dfrac{i+1}{(2i+1)a^{2i+1}}\,G_i = 0, \\ U_i - \dfrac{4\pi}{3}(1-k)G_i + 4\pi k\,\dfrac{i b^{2i+1}}{2i+1}\,H_i - 4\pi k\,\dfrac{(i+1)}{2i+1}\,G_i = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduira les valeurs de H_i, G_i qu'il s'agissait de déterminer. De ce que $U_0 = 0$, la seconde des équations précédentes donne $G_0 = 0$ et on tire de la première

$$(7)\qquad V_0 - \frac{4\pi}{3}(1-k)H_0 = 0,$$

En remarquant que l'unité est une fonction sphérique de l'ordre O, les formules (1) donnent pour les quantités totales de fluide libre fictives répandues sur les surfaces extérieure et intérieure de l'enveloppe

$$a^2\int\int E' \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = -4\pi G_0,$$

$$b^2\int\int E'' \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi'' = -4\pi G_0,$$

et sont ainsi nulles puisque $G_0 = 0$.

10. *Action de l'enveloppe sur un point donné extérieur ou intérieur.* — Soient F la fonction dont les dérivées changées de signe par rapport à x, y, z donnent les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'action exercée sur le point M.

Cette fonction ne sera autre chose que le premier membre de l'équation (2) dans lequel on supprimera le terme en $(1-k)$ qui caractérise un point d'un élément magnétique de l'enveloppe et par conséquent on aura

$$(8)\quad \begin{cases} F = V + U - ka^2 \displaystyle\iint \frac{1}{u'} \sum \left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}} \right] \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' \\ \qquad + kb^2 \displaystyle\iint \frac{1}{u''} \sum \left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G''_i}{b^{i+2}} \right] \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi''. \end{cases}$$

1° *Le point* M *est extérieur.* Comme $r > a > b$, nous pourrons écrire, comme plus haut,

$$\frac{1}{u''} = \sum Y''_i \frac{b^i}{r^{i+1}}, \quad U = \sum \frac{U_i}{r^{i+1}}.$$

On reconnaît facilement que le coefficient du terme en $\frac{1}{r^{i+1}}$ de F fournit par U et u'' n'est autre chose que le premier membre de la seconde des équations (6) dont on aurait supprimé le second terme; ce coefficient est donc égal à $\frac{4\pi}{3}(1-k)\, G_i$; nous avons donc déjà

$$F = V + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum \frac{G_i}{r^{i+1}}$$
$$- ka^2 \iint \frac{1}{u'} \sum \left[iH_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}} \right] \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi'.$$

Mais nous devons poser aussi

$$\frac{1}{u'} = \sum \frac{Y'_i a^i}{r^{i+1}},$$

Y'_i ayant la même valeur qu'au numéro précédent. Il vient donc

$$F = V + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum \frac{G_i}{r^{i+1}} + 4\pi k \sum \frac{1}{r^{i+1}} \left[\frac{iH_i}{2i+1} a^{2i+1} - \frac{(i+1)}{2i+1} G_i \right].$$

Au moyen de la première des équations (6), cette expression se réduit facilement à la suivante :

$$(9) \qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V_i}{r^{i+1}} + \frac{4\pi}{3}(1-k) \sum \frac{a^{2i+1} H_i + G_i}{r^{i+1}}.$$

2° *Le point* M *est intérieur à l'enveloppe ou* $r < b < a$. — On devra prendre

$$\frac{1}{u'} = \sum \frac{Y'_i r^i}{a^{i+1}}, \quad V = \sum V_i r^i,$$

comme au n° **8**. Le terme en r^i fourni par le premier et le troisième terme de F ne sera alors autre chose que le premier membre de la première des équations (6) dans lequel on aurait supprimé le terme en $(1-k)$; nous avons donc déjà

$$F = U + \frac{4\pi}{3}(1-k) \sum H_i r^i$$
$$+ kb^2 \int\int \frac{1}{u'} \left[H''_i i b^{i-1} - \frac{i+1}{b^{i+2}} G''_i \right] \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\Phi''$$

Comme ici nous devons prendre

$$\frac{1}{u''} = \sum \frac{Y''_i r^i}{b^{i+1}},$$

il vient

$$F = U + \frac{4\pi}{3}(1-k) \sum H_i r^i + 4\pi k \sum r^i \left[\frac{H_i}{2i+1} - \frac{G_i}{(2i+1) b^{2i+1}} \right],$$

ou, en ayant égard à la seconde des équations (6),

$$(10) \qquad F = U - \sum \frac{U_i r_i}{b^{2i+1}} + \frac{4\pi}{3}(1-k) \sum r^i \left[H_i + \frac{G_i}{b^{2i+1}} \right],$$

11. *Examen de quelques cas particuliers*. — 1° $k = 1$. Cette hypoth
se réalise à très peu près pour le fer doux. Les équations (9) et (
se réduisent aux suivantes :

$$(9') \qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V_i}{r^{i+1}},$$

$$(10') \qquad F = U - \sum \frac{U_i r^i}{b^{2i+1}}.$$

D'où cette double proposition : *L'action exercée sur le point M est indépendante des masses magnétiques intérieures s'il est intérieur et des masses magnétiques extérieures s'il est intérieur.*

2° *La sphère est pleine.* Nous avons $U = 0$, $b = 0$, par suite $G_i = 0$ d'après la seconde des équations (6); la première de ces équations donne

$$(6') \qquad H_i = \frac{V_i}{4\pi\left[\frac{(1-k)}{3} + \frac{ki}{2i+1}\right]}$$

et l'équation (9)

$$(9') \qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1}V^i}{r^{i+1}}\left(1 - \frac{1}{1-k+3ki}\right).$$

3° *L'enveloppe sphérique n'est soumise qu'à une action extérieure constante en grandeur et en direction.* Supposons, pour fixer les idées, que cette action est celle qui est produite par la terre. Nous dirigerons la partie positive de l'axe Oz vers le pôle boréal terrestre, et nous ferons passer par M le plan zOx qui, étant un plan de symétrie, renfermera l'intensité magnétique. Nous poserons

$$V = -mz = -mr\cos\theta, \quad U = 0, \quad \beta = 0.$$

m étant une constante qui sera positive pour notre hémisphère.

Nous aurons ainsi

$$V_0 = 0, \quad V_1 = -m\cos\theta \quad \text{et} \quad V_i = 0 \text{ pour } i > 2$$

et, en vertu des équations (6),

$$H_i = 0, \quad G_i = 0 \text{ pour } i > 1, \quad H_0 = 0,$$

en nous rappelant que $G_0 = 0$..

De ces mêmes équations on déduit

$$(6'') \qquad \begin{cases} H_1 = A(1+k)\cos\theta, \\ G_1 = Akb^3\cos\theta, \end{cases}$$

en posant

$$(11)\qquad A = \frac{3ma^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}.$$

De la formule (30) du n° 8 on déduit alors

$$f = A r \cos\theta\left(1 + k + k\frac{b^3}{r^3}\right).$$

Désignons par $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ les composantes suivant le rayon et la méridienne de l'intensité magnétique au point M (n° 2), dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont respectivement

$$\alpha = \frac{df}{dx},\quad \beta = \frac{df}{dy},\quad \gamma = \frac{df}{dz}.$$

Nous avons

$$(11')\qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \dfrac{df}{dr} = A\cos\theta\left(1 + k - 2k\dfrac{b^3}{r^3}\right), \\ \mathfrak{M} = \dfrac{df}{r\,d\theta} = -A\sin\theta\left(1 + k + k\dfrac{b^3}{r^3}\right), \end{cases}$$

et l'on voit ainsi que l'intensité magnétique en chacun des points de (A) est parallèle à la direction du magnétisme terrestre. Des formules (11'), on déduit

$$\alpha = \mathfrak{R}\sin\theta + \mathfrak{M}\cos\theta = -3Ak\frac{b^3}{r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\gamma = \mathfrak{R}\cos\theta - \mathfrak{M}\sin\theta = A\left[1 + k + k\frac{b^3}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)\right].$$

En se rapportant à la formule (9) et ayant égard aux valeurs ci-dessus de V_1, H_1, G_1, A, on trouve, pour la fonction potentielle d'un point M extérieur à l'enveloppe,

$$(12)\qquad F = m\cos\theta\left(-r + B\frac{a^3}{r^2}\right),$$

en posant

$$(13)\qquad B = k\frac{(k+1)(a^3 - b^3)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}.$$

On déduit de là pour les composantes de l'action exercée sur M, estimées suivant le rayon et la méridienne,

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}_1 = -m\cos\theta\left(1+2B\dfrac{a^3}{r^3}\right), \\ \mathfrak{M}_1 = -m\sin\theta\left(-1+B\dfrac{a^3}{r^3}\right). \end{cases}$$

Ainsi donc l'action dont il s'agit est parallèle à la direction du magnétisme terrestre.

Des formules précédentes on déduit aussi

$$\frac{dF}{dx} = \mathcal{R}_1\sin\theta + \mathfrak{M}_1\cos\theta = -mB\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{dF}{dz} = \mathcal{R}\cos\theta - \mathfrak{M}_1\sin\theta = -m\left[1 - B\frac{a^3}{r^3}(1-3\cos^2\theta)\right],$$

ou encore

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = -mB\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{dF}{dz} = -m\left[1 - B\dfrac{a^3}{r^3}\left(1-\dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Si la sphère est pleine ou si $b = 0$, on a simplement

$$(15')\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{dF}{dz} = -m\left[1 - k\dfrac{a^3}{r^3}\left(1-\dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Il est évident que, si les axes Ox et Oy sont orientés d'une manière quelconque, on doit substituer à ces formules les suivantes :

$$(15'')\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{dF}{dy} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}yz, \\ \dfrac{dF}{dz} = -m\left[1 - k\dfrac{a^3}{r^3}\left(1-\dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

§ IV. — Application des formules générales a l'ellipsoide.

12. *Expression de la fonction potentielle* Q. — Rappelons-nous les formules suivantes du n° 6 :

$$(1)\qquad \frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=0,$$

$$(2)\qquad Q=-k\int\left(\frac{df'}{dx'}\cos l'+\frac{df'}{dy'}\cos m'+\frac{df'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{u'}.$$

Soient

$$(3)\qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde donné (A);

ϖ' l'angle formé par la normale au point (x', y', z') avec le rayon vecteur OM' $= r'$ mené en ce point;

$d\sigma$ l'ouverture sphérique du cône ayant son sommet et pour base l'élément $d\omega'$ de la surface de (A).

En posant

$$\Delta=\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}},$$

nous avons

$$\cos l'=\frac{1}{\Delta}\frac{x'}{a^2},\quad \cos m'=\frac{1}{\Delta}\frac{y'}{b^2},\quad \cos n'=\frac{1}{\Delta}\frac{z'}{c^2},$$

$$\cos\varpi'=\frac{x'}{r'}\cos l'+\frac{y'}{r'}\cos m'+\frac{z'}{r'}\cos n'=\frac{1}{r'\Delta},$$

$$d\omega'=r'^2\frac{d\sigma}{\cos\varpi'}=\Delta r'^3\,d\sigma.$$

Par suite,

$$(2')\qquad Q=-k\int\left(\frac{df}{dx'}\frac{x'}{a^2}+\frac{df}{dy'}\frac{y'}{b^2}+\frac{df}{dz'}\frac{z'}{c^2}\right)r'\frac{r'^2d\sigma}{u'}.$$

Nous supposerons que l'ellipsoïde n'est soumis qu'à une action extérieure constante en grandeur et en direction, ce qui revient à poser

$$(4)\qquad V=\mathcal{A}x+\mathcal{B}y+\mathcal{C}z,$$

en désignant par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois constantes données. Nous allons chercher à satisfaire aux conditions d'équilibre magnétique intérieur de l'ellipsoïde en posant

$$(5) \qquad f = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

α, β, γ étant des coefficients inconnus.

Nous rappellerons (nos 5 et 6) que $\alpha = \frac{df}{dx}$, $\beta = \frac{df}{dy}$, $\gamma = \frac{df}{dz}$ doivent être considérés comme des infiniment petits.

La formule (2') devient

$$(2'') \qquad Q = -k\int\left(\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z'}{c^2}\right) r' \frac{r'^2 d\sigma}{u'}.$$

Considérons un second ellipsoïde (A') obtenu en transportant (A) parallèlement à lui-même, de manière que son centre vienne coïncider avec le point dont les coordonnées parallèles à Ox, Oy, Oz sont respectivement α, β, γ. En désignant par x'', y'', z'' les coordonnées d'un point quelconque M'' de la surface de (A') et par r'' le rayon OM'' de ce point, nous avons

$$\frac{(x'' - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y'' - \beta)^2}{b^2} + \frac{(z'' - \gamma)^2}{c^2} = 1,$$

ou, en ne conservant que les premières puissances de α, β, γ,

$$\frac{x''^2 - 2\alpha x''}{a^2} + \frac{y''^2 - 2\beta y''}{b^2} + \frac{z''^2 - 2\gamma z''}{c^2} = 1.$$

Si l'on fait coïncider la direction de OM'' avec celle de OM', on a

$$x'' = \frac{r''}{r'} x', \quad y'' = \frac{r''}{r'} y', \quad z'' = \frac{r''}{r'} z'$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (3),

$$\left(\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z'}{c^2}\right) r' = \frac{r''^2 - r'^2}{2 r'} = r'' - r'.$$

Nous avons donc

$$Q = k\int (r' - r'')\frac{r'^2 d\sigma}{u'}.$$

Cette expression n'est autre chose, au facteur k près, que la fonction potentielle de M qui serait due à l'attraction du volume de la couche limitée par (A) et (A′) ou la différence des potentiels qui se rapportent à ces deux volumes. On sait que les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'attraction exercée par (A) sur un point (x, y, z), qu'il soit extérieur ou intérieur, sont de la forme

$$-Nx, \quad -N'y, \quad -N''z,$$

N, N', N'' étant des coefficients positifs qui ne dépendent que de a, b, c. Les composantes semblables relatives à (A′) seront

$$-N(x-\alpha), \quad -N'(y-\beta), \quad N''(z-\gamma);$$

d'où, pour les différences,

$$-N\alpha, \quad -N'\beta, \quad -N''\gamma,$$

nous aurons donc

$$(6) \qquad \frac{dQ}{dx} = -Nk\alpha, \quad \frac{dQ}{dy} = -N'k\beta, \quad \frac{dQ}{dz} = -N''k\gamma,$$

par suite

$$(7) \qquad Q = -k(N\alpha x + N'\beta y + N''\gamma z).$$

13. *Rappel des formules relatives à l'attraction exercée par le volume d'un ellipsoïde sur un point* (x, y, z). — Supposons que $2c$ soit le plus petit des trois axes et posons

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = \lambda^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{c^2} = \lambda'^2.$$

Considérons d'abord le cas où le point attiré est intérieur et désignons par c_1 le demi-axe parallèle à Oz de l'ellipsoïde homofocal du

proposé passant par ce point. Nous avons, pour déterminer c_1, l'équation

$$(8) \qquad \frac{z^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_1^2 + b^2 - c^2} + \frac{x^2}{c_1^2 + a^2 - c^2} = 1,$$

qui n'admet qu'une racine positive pour c_1^2; les deux autres racines se rapportent aux hyperboloïdes homofocaux.

Nous avons maintenant ([1]), u étant une variable auxiliaire,

$$(9) \qquad \mathrm{L} = \int_0^{\frac{c}{c_1}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)(1+\lambda'^2 u^2)},$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\dfrac{d\lambda \mathrm{L}}{d\lambda}, \\[2ex] \mathrm{N}' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\dfrac{d\lambda' \mathrm{L}}{d\lambda'}, \\[2ex] \mathrm{N}'' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\mathrm{L}. \end{cases}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (9) u par $\frac{c}{c_1}u$ et posons

$$\lambda_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{c_1^2} = \lambda^2 \frac{c^2}{c_1^2}, \qquad \lambda_1'^2 = \frac{b^2 - c^2}{c_1^2} = \lambda'^2 \frac{c^2}{c_1^2},$$

$$(11) \qquad \mathrm{L}_1 = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda_1^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda_1'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous aurons

$$\mathrm{L} = \frac{c^3}{c_1^3}\mathrm{L}_1,$$

$$\frac{d\lambda \mathrm{L}}{d\lambda} = \frac{d\lambda_1 \mathrm{L}}{d\lambda_1} = \frac{c^3}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 \mathrm{L}_1}{\lambda_1^2}, \qquad \frac{d\lambda' \mathrm{L}}{d\lambda'} = \frac{c^3}{c_1^3}\frac{d\lambda_1' \mathrm{L}_1}{d\lambda_1'}.$$

([1]) *Voir* notamment les formules des p. 151-152 de notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, en y remplaçant m par l'unité, M par $4\pi abc$, L par $\frac{4}{3}\pi abc\,\mathrm{L}$, c' par c_1 et enfin λ par λ', et *vice versa*.

Par suite

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \frac{4\pi abc}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1},\\ N' &= \frac{4\pi abc}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1},\\ N'' &= \frac{4\pi abc}{c_1^3}L_1. \end{aligned}\right.$$

Les formules (11) et (12) s'appliqueront au cas où le point attiré se trouve sur la surface de l'ellipsoïde, en y supposant $c_1 = c$ ou $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda'$, et alors nous avons

$$(11')\qquad L = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(12')\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \frac{4\pi ab}{c^2}\frac{d\lambda L}{d\lambda},\\ N' &= \frac{4\pi ab}{c^2}\frac{d\lambda' L}{d\lambda'},\\ N'' &= \frac{4\pi ab}{c^2}L. \end{aligned}\right.$$

Si le point est intérieur, l'attraction se réduira a celle de l'ellipsoïde déterminé par la surface semblable à celle du précédent passant par ce point; mais, comme pour les deux ellipsoïdes les rapports $\frac{ab}{c^2}$, λ, λ' ont les mêmes valeurs, les formules (11') et (12') s'appliqueront encore au cas considéré.

On voit ainsi que l'on peut se borner à considérer les formules (11) et (12) en convenant d'y faire $c_1 = c$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda'$ si le point attiré est situé sur la surface de l'ellipsoïde ou dans son intérieur.

Cas particulier. — On a

$$\frac{dL_1}{d\lambda_1} = -\int_0^1 \frac{\lambda_1 u^2\,du}{(1+\lambda_1^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda_1'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de Oz, ou si $a = b$ ou $\lambda_1 = \lambda'_1$, il

égard à la valeur (4),

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \mathcal{A} + \frac{dQ}{dx},\\ Y &= \mathcal{B} + \frac{dQ}{dy},\\ Z &= \mathcal{C} + \frac{dQ}{dz}.\end{aligned}\right.$$

En se reportant au n° **16**, l'action de l'ellipsoïde (A) sur le point M a pour composantes, suivant Ox, Oy, Oz,

$$-4\pi\frac{abc}{c_1^3}x\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1},\quad -4\pi\frac{abc}{c_1^3}y\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1},\quad -4\pi\frac{abc}{c_1^3}zL_1,$$

en ne perdant pas de vue que c_1, λ_1, λ'_1 sont des fonctions de x, y, z.

Les composantes semblables de l'attraction exercée par l'ellipsoïde (A′) s'obtiendront en remplaçant dans les expressions précédentes x, y, z respectivement par $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; mais, comme α, β, γ sont traités comme des infiniment petits, on voit que le résultat sera le même que si l'on ajoutait aux expressions ci-dessus leurs différentielles totales, en y remplaçant dx, dy, dz par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

En prenant la différence entre les actions exercées par (A) et (A′), nous aurons

$$\frac{dQ}{dx} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dx} + \beta\frac{d\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dy} + \gamma\frac{d\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dz}\right),$$

$$\frac{dQ}{dy} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\frac{y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dx} + \beta\frac{d\frac{y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dy} + \gamma\frac{d\frac{y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dz}\right),$$

$$\frac{dQ}{dz} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\frac{zL_1}{c_1^3}}{dx} + \beta\frac{d\frac{zL_1}{c_1^3}}{dy} + \gamma\frac{d\frac{zL_1}{c_1^3}}{dz}\right).$$

Si l'on ajoute entre elles ces valeurs multipliées respectivement par dx, dy, dz, on trouve, pour le coefficient de $-4\pi k abc\alpha$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}dx + y\frac{d\lambda'_1 L_1}{c_1^3 d\lambda'_1}dy + z\frac{L_1}{c_1^3}dz\right).$$

Cette expression n'étant autre chose que celle d'un potentiel, la quantité entre crochets est nécessairement une différentielle exacte de x, y, z et l'on doit avoir par suite

$$\frac{dx\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dy} = \frac{dy\,\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dx}, \qquad \frac{dx\,\frac{d\lambda L_1}{d\lambda_1}}{dz} = \frac{dz L_1}{dx}, \qquad \frac{dy\,\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dz} = \frac{dz L_1}{dy},$$

Il suit de là que l'on a

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = -4\pi kabc\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\alpha x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \dfrac{\beta y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L^2}{d\lambda'_1} + \dfrac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right), \\ \dfrac{dQ}{dy} = -4\pi kabc\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\alpha x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \dfrac{\beta y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1} + \dfrac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right), \\ \dfrac{dQ}{dz} = -4\pi kabc\,\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\alpha x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \dfrac{\beta y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda'_1} + \dfrac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right), \end{cases}$$

d'où

$$(17)\qquad Q = -4\pi abc\left(\frac{\alpha x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \frac{\beta y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L'_1}{d\lambda'_1} + \frac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right).$$

Au moyen des valeurs (16) les formules (14) feront connaître les composantes cherchées.

16. *Vérification dans le cas de la sphère.* — On a $a = b = c$, $\lambda_1 = c$, $\lambda'_1 = 0$, $L_1 = \frac{1}{3}$. Les formules (12) donnent

$$\frac{4\pi\alpha}{3} = \mathcal{A}, \quad \frac{4\pi\beta}{3} = \mathcal{B}, \quad \frac{4\pi\gamma}{3} = \mathcal{C},$$

et l'équation (17) devient

$$(18)\qquad Q = -k\frac{a^3}{r^3}(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z).$$

Si l'on fait coïncider l'axe des z avec la direction de la force extérieure qui sera, si l'on veut, l'action $-m$ du globe terrestre, et si l'on fait passer le plan zOx par le point M, on a

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{C} = -m, \quad y = 0,$$

[illegible]

$$Q = mk\frac{a^3}{r^3}z;$$

[illegible]

$$\frac{dQ}{dx} = -3mk\frac{a^3}{r^5}xz,$$

$$\frac{dQ}{dz} = mk\frac{a^3}{r^3}\left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right).$$

[illegible] a force extérieure $-m$ à la seconde de ces formules, on [illegible] formules (15′) du n° **11**.

[illegible] *ellipsoïde de révolution aplati.* — Nous avons $a = b$, [illegible] équations (13) et (14) donnent, en faisant $\lambda_1 = \lambda = \frac{a-c}{c}$,

$$\left\{\begin{aligned} &[illegible]\; 4\pi\alpha\left[\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right],\\ &[illegible]\; 4\pi\beta\left[\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right],\\ &[illegible]\; 4\pi\gamma\left[\frac{1-k}{3} + k\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\lambda\right)\right],\end{aligned}\right.$$

d'où α, β, γ.

En ce qui concerne l'action de l'ellipsoïde sur un point extérieur, on a, en portant les valeurs (13) dans la formule (17),

$$(20)\quad Q = 4\pi k\frac{a^2c}{c_1(a^2-c^2)}\left[\frac{1}{2}(\alpha x + \beta y)\left(\frac{1}{\lambda_1}\text{arc tang}\,\lambda_1 - \frac{1}{1+\lambda_1^2}\right) + \gamma z\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\text{arc tang}\lambda_1\right)\right].$$

En faisant $a = b$ et désignant par r la distance du point M au centre O, la formule (8) donne

$$(21)\quad c_1^2 = \frac{1}{2}[r^2 - a^2 + c^2] + \frac{1}{2}\sqrt{(r^2 - a^2 + c^2)^2 + 4(a^2 - c^2)z^2},$$

en y joignant la relation

$$(22)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On pourra ainsi former les valeurs de $\frac{dQ}{dx}, \frac{dQ}{dy}, \frac{dQ}{dz}$, et par suite trouver les composantes X, Y, Z de l'action cherchée.

18. *L'ellipsoïde de révolution est très aplati.* — Supposons que le rapport $\frac{c}{a}$ soit assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré; nous obtiendrons une sorte de plaque circulaire dont l'épaisseur décroîtra en allant du centre à la circonférence; on a

$$\lambda \frac{c}{a} = 1, \quad \text{arc tang}\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{a},$$

et les équations (19) deviennent

$$(19') \quad \begin{cases} 4\pi\alpha = \dfrac{3\mathcal{A}}{1 - k + \dfrac{3\pi}{4} k \dfrac{c}{a} - 3k \dfrac{c^2}{a^2}}, \\[2ex] 4\pi\beta = \dfrac{3\mathcal{B}}{1 - k + \dfrac{3\pi}{4} k \dfrac{c}{a} - 3k \dfrac{c^2}{a^2}}, \\[2ex] 4\pi\gamma = \dfrac{3\mathcal{C}}{1 - k + \dfrac{3\pi}{2} k \dfrac{c}{a}}. \end{cases}$$

On a conservé le terme en $\frac{c^2}{a^2}$ en dénominateur des deux premières de ces expressions, en raison de ce que, en général, $1 - k$ est une très petite fraction.

La formule (20) donne ensuite

$$(20') \quad \begin{cases} Q = -\dfrac{3kc(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{2\left(1 - k + \dfrac{3\pi}{4}\dfrac{kc}{a} - 3k\dfrac{c^3}{a^3}\right)}\left(\dfrac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\dfrac{a}{c_1} - \dfrac{c_1}{a^2 + c_1^2}\right) \\[2ex] \qquad - \dfrac{3kc\mathcal{C}z}{1 + 2k - \dfrac{3\pi}{2}\dfrac{k^2}{a}}\left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\dfrac{a}{c_1}\right). \end{cases}$$

Admettons maintenant que le point M soit assez peu éloigné du centre de la plaque pour que l'on puisse négliger les carrés de $\frac{z^2}{a^2}, \frac{r^2}{a^2}$. L'équa-

tion (21) donne

$$(21') \qquad c_1 = \pm z\left(1 + \frac{r^2 - z^2}{2a^2}\right),$$

en prenant le signe + ou le signe — selon que z est positif ou négatif. On a d'ailleurs

$$\text{arc tang}\frac{a}{c_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{c_1}{a} + \frac{c^3}{3a^3},$$

et l'expression (20') se réduit à

$$\begin{aligned} Q = &- \frac{3kc(\mathcal{A}x + \mathrm{B}y)}{2\left(1 - k + \frac{3\pi}{2}\frac{kc}{a} - 3k\frac{c^2}{a^2}\right)}\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{2z}{a}\right) \\ &- \frac{3rc\mathcal{C}z}{1+2k}\left(\pm\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{\pi z}{2a} \pm \frac{z^2}{a^2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -\frac{3k\pi\mathcal{A}c}{4a\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a} - \frac{3kc^2}{a^2}\right)} \pm \frac{3kc\mathcal{A}z}{\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}, \\ \frac{dQ}{dy} &= -\frac{3\pi kc\mathcal{B}}{4a\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a} - \frac{3kc^2}{a^2}\right)} \pm \frac{3kc\mathcal{B}z}{\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}, \\ \frac{dQ}{dz} &= -\frac{3\pi kc\mathcal{C}}{2(1+2k)a} \pm \frac{3kc(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}. \end{aligned} \right.$$

De ces formules on déduit ce qui suit :

Supposons que la différence $1 - k$ soit assez petite pour être négligée. Les équations (15) et (22) donneront, pour les composantes de l'action exercée sur M,

$$X = \frac{4c\mathcal{A}}{\pi a} \mp \frac{4\mathcal{A}z}{\pi a},$$

$$Y = \frac{4c\mathcal{B}}{\pi a} \mp \frac{4\mathcal{B}z}{\pi a},$$

$$Z = -\mathcal{C} - \frac{\pi c\mathcal{C}}{2a} - \frac{4(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{\pi a}.$$

On voit ainsi que l'action de la plaque détruit en presque totalité la

composante de la force extérieure parallèle au plan moyen de cette plaque, tandis que la composante normale à ce plan n'a pas été sensiblement modifiée, à la condition toutefois que la composante dont il s'agit ne soit pas très petite ou que la force extérieure ne soit pas trop inclinée sur la plaque; de sorte qu'une aiguille aimantée suspendue librement par son centre prendrait une direction sensiblement normale à la plaque.

En supposant que la force extérieure soit due au magnétisme terrestre, Poisson a considéré, comme application de sa formule, les cas où la plaque est horizontale et où elle est parallèle à l'axe des pôles magnétiques. Les conséquences auxquelles il arrive ne sont pas de nature à trouver place dans cette analyse.

19. *Cas d'un ellipsoïde allongé.* — Soit $b = c$; on a

$$\lambda'_1 = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$L_1 = \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{2\lambda_1^2} - \frac{1}{2\lambda_1^3}\log(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}),$$

$$\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_1^2\sqrt{1+\lambda_1^2}} + \frac{1}{\lambda_1^3}\log(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}),$$

$$\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1} = L_1,$$

et, pour déterminer c_1,

$$y^2 + z^2 + \frac{c_1^2 x^2}{c_1^2 + a^2 - c^2} = c_1^2,$$

d'où

$$c_1^2 = \tfrac{1}{2}(r^2 - a^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 - a^2 + c^2)^2 + 4(a^2 - c^2)(y^2 + z^2)}.$$

On n'a plus maintenant qu'à faire des substitutions dans les équations (14) et (17) pour obtenir la solution du problème.

20. *L'ellipsoïde est très allongé.* Supposons que $\frac{c}{a}$ soit assez petit pour que l'on puisse en négliger le carré; l'ellipsoïde deviendra une

sorte d'aiguille (A) ayant pour longueur $2a$ et dont c serait le rayon en son milieu. On a

$$\lambda_1 c_1 = a,$$

(24)
$$\left\{\begin{aligned} 4\pi\alpha &= \frac{3\mathcal{A}}{1-k+3k\frac{c^2}{a^2}\left(\log\frac{2a}{c}-1\right)},\\ 4\pi\beta &= \frac{3\mathcal{B}}{1+\frac{k}{2}},\\ 4\pi\gamma &= \frac{3\mathcal{C}}{1+\frac{k}{2}},\end{aligned}\right.$$

$$Q = -\frac{3kc^2(\mathcal{B}y+\mathcal{C}z)}{\left(1+\frac{k}{2}\right)c_1^2} - \frac{3kc^2\mathcal{A}x\left(\log\frac{2a}{c_1}-1\right)}{(1-k)a^2+3kc^2\left(\log\frac{2a}{c}-1\right)}.$$

Admettons maintenant que la distance du point M au milieu de l'aiguille soit assez petite pour que l'on puisse négliger le carré de $\frac{r}{a}$, et, par suite, celui de $\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a}$; alors on a

$$c_1 = \sqrt{y^2+z^2},$$

et, en posant

(25)
$$k' = \frac{3kc^2}{(1-k)a^2+3kc^2\left(\log\frac{2a}{c}-1\right)},$$

on trouve

(26)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -k'\mathcal{A}\left(\log\frac{2a}{\sqrt{y^2+z^2}}-1\right),\\ \frac{dQ}{dy} &= \frac{3kc^2[\mathcal{B}(y^2-z^2)+2\mathcal{C}yz]}{\left(1+\frac{k}{2}\right)(y^2+z^2)} + k'\frac{\mathcal{A}xy}{y^2+z^2},\\ \frac{dQ}{dz} &= \frac{3kc^2[\mathcal{C}(z^2-y^2)+2\mathcal{B}yz]}{\left(1+\frac{k}{2}\right)(y^2+z^2)} + k'\frac{\mathcal{A}xz}{y^2+z^2}.\end{aligned}\right.$$

On déduit de ces formules les conséquences suivantes, en supposant que la force extérieure soit due à l'action magnétique terrestre.

1° *L'aiguille* (A) *est perpendiculaire au plan du méridien magnétique.* — On a $\mathcal{A} = 0$ et, de plus, $\mathcal{B} = 0$ en prenant la partie positive de l'axe des z dirigée vers le pôle boréal ; la quantité Θ sera négative ou positive selon que la particule magnétique placée en M sera boréale ou australe.

Désignant par u la distance du point M à l'axe de l'aiguille et par ν l'angle qu'elle fait avec l'axe Oz, on a

$$y = u \sin\nu, \quad z = u \cos\nu,$$

et, en posant

$$\frac{3k}{1 + \frac{k}{2}} = 2g,$$

on trouve

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{2gc^2\Theta \sin 2\nu}{u^2},$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{2gc^2\Theta \cos 2\nu}{u^2};$$

puis on a

$$X = 0,$$

$$Y = -\frac{2gc^2\Theta \sin 2\nu}{u^2},$$

$$Z = -\Theta - \frac{2gc^2\Theta \cos 2\nu}{u^2}.$$

Si le point M appartient à une aiguille aimantée (C), suspendue librement par son centre de gravité, très courte relativement à la distance u de son milieu au point O, cette aiguille restera dans le plan du méridien magnétique, mais l'influence de l'aiguille ellipsoïdale (A) modifiera son inclinaison. En appelant ε l'angle que la partie de l'aiguille (C) qui aboutit au pôle boréal fera avec sa direction naturelle,

on aura

$$\tang\varepsilon = \frac{Y}{Z} = \frac{2gc^2 \sin 2\nu}{u^2 + 2gc^2 \cos 2\nu}.$$

Il y aura un cas où l'aiguille (C) ne prendra plus de direction déterminée, c'est lorsque l'on aura en même temps $Y = 0$, $Z = 0$, ou

$$\nu = \frac{\pi}{2}, \quad u = c\sqrt{2g}.$$

2° *L'aiguille* (A) *est parallèle à l'action magnétique terrestre.* — On a $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$ et, si la partie positive de Ox est dirigée vers le pôle magnétique boréal, la quantité $\mathcal{A}$ sera positive ou négative selon que la particule située en M sera boréale ou australe.

En continuant à désigner par u la distance du point M à Ox, et par ν l'angle qu'elle fait avec Oz, on a

$$X = -\mathcal{A} + k'\mathcal{A}\left(\log\frac{2a}{u} - 1\right),$$

$$Y = -\frac{k'\mathcal{A}'x \sin\nu}{u},$$

$$Z = -\frac{k'\mathcal{A}\, x \cos\nu}{u}.$$

La résultante des forces Y et Z est dirigée suivant la distance de M à l'axe de l'aiguille et varie en raison inverse du carré de cette distance.

Si donc le point M appartient à une aiguille aimantée (C) librement suspendue par son centre de gravité, la projection de cette aiguille sur un plan perpendiculaire à l'axe de (A) sera normale à cette droite, et l'on voit, d'après les signes de $\mathcal{A}$ et de x, que ce sera la projection de son pôle boréal ou celle de son pôle austral qui tombera du côté de (A), selon que le plan perpendiculaire en O à Ox passera au-dessous ou au-dessus du milieu de (C), ou selon que x sera positif ou négatif. Si l'on désigne par ε' l'inclinaison sur Ox de l'aiguille (C) dont la lon-

gueur est censée très petite par rapport à u, on a

$$\operatorname{tang}\varepsilon' = -\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{X} = \frac{k'x}{u\left(1+k'-k'\log\frac{2a}{u}\right)}.$$

Supposons maintenant que l'aiguille (C) soit assujettie à rester horizontale; soient $O\chi$ la projection horizontale de Ox; i l'inclinaison magnétique $\widehat{xO\chi}$; nous prendrons pour axe des y la perpendiculaire en O au plan des $xO\chi$; soit, de plus, δ l'angle formé par (C) avec sa direction naturelle $O\chi$. Les forces X et Z donnent suivant $O\chi$ la composante

$$X\cos i + Z\sin i;$$

on a, par suite,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X\cos i + Z\sin i} = \frac{k'x\sin\nu}{k'x\cos\nu\sin i + u\left(1+k'-k'\log\frac{2a}{u}\right)\cos i}.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'établir.

§ V. — Actions simultanées de plusieurs sphères aimantées par l'influence de la terre sur un point qui leur est extérieur.

21. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les centres des n sphères.

Nous rappellerons (n° **19**) que pour chaque sphère les coordonnées du point extérieur M sont rapportées à trois axes rectangulaires menés par le centre de cette sphère. Nous supposerons tous les systèmes d'axes parallèles entre eux, de manière que les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ du magnétisme terrestre suivant leurs trois directions soient les mêmes quand on passera d'une sphère à une autre.

Nous distinguerons par l'indice i les quantités k, a, r, x, y, z, Q qui se rapportent à la sphère dont le centre est C_i.

Les composantes de l'action totale exercée par les sphères sur le point M sont

$$X = \sum\frac{dQ_i}{dx_i},\quad Y = \sum\frac{dQ_i}{dy_i},\quad Z = \sum\frac{dQ_i}{dz_i}$$

ou, en vertu de la formule (19) du n° **19**,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{A}\left(1-\frac{3x_i^2}{r_i^2}\right)-\frac{3x_i}{r_i^2}(\mathcal{B}y_i+\mathcal{C}z_i)\right],\\
\mathrm{Y} &= -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{B}\left(1-\frac{3y_i^2}{r_i^2}\right)-\frac{3y_i}{r_i^2}(\mathcal{A}x_i+\mathcal{C}z_i)\right],\\
\mathrm{Z} &= -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{C}\left(1-\frac{3z_i^2}{r_i^2}\right)-\frac{3z_i}{r_i^2}(\mathcal{A}x_i+\mathcal{B}y_i)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

25. Cherchons à voir si le système de sphères ne peut pas être combiné de manière qu'il n'exerce aucune action sur le point M, quand même le magnétisme terrestre viendrait à éprouver un changement en grandeur et en direction. Nous avons, en égalant à zéro les coefficients de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des expressions précédentes,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1-\frac{3x_i^2}{r_i^2}\right)=0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1-\frac{3y_i^2}{r_i^2}\right)=0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1-\frac{3z_i^2}{r_i^2}\right)=0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}x_i y_i=0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}x_i z_i=0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}y_i z_i=0.
\end{aligned}
\right.
$$

La somme [1] des équations (2) étant identiquement nulles, on voit que l'on n'a à satisfaire qu'à cinq conditions.

---

[1] Par une singulière inadvertance, Poisson a écrit ainsi cette somme

$$\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3},$$

et, comme elle ne peut pas être nulle, il avait conclu de là que les actions des sphères ne pouvaient pas s'entre-déduire pour toutes les directions du magnétisme terrestre.

22. Déterminons maintenant les conditions que doit remplir le système de sphères pour qu'il n'ait aucune influence sur la direction de l'aiguille de déclinaison, quelle que soit celle du magnétisme terrestre. Nous placerons l'origine des coordonnées au milieu O de l'aiguille en prenant le plan horizontal pour celui des xy.

Nous poserons en conséquence

$$\frac{X}{Y} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}};$$

d'où, en vertu des deux premières des équations (1),

$$\begin{aligned}&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{A}\mathcal{B}\left(1 - \frac{3x_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3x_i}{r_i^2}(\mathcal{B}^2 y_i + \mathcal{B}\mathcal{C} z_i)\right]\\ -&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{B}\mathcal{A}\left(1 - \frac{3y_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3y_i}{r_i^2}(\mathcal{A}^2 x_i + \mathcal{A}\mathcal{C} z_i)\right] = 0.\end{aligned}$$

On déduit de là, en égalant à zéro les coefficients de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{A}\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\mathcal{C}$,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}(x_i^2 - y_i^2) = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i z_i = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} y_i z_i = 0.\end{aligned}\right.$$

23. Considérons d'abord le cas de deux sphères; nous avons

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5}(x_1^2 - y_1^2) = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^3}(x_2^2 - y_2^2),\\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 y_1 \qquad = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} x_2 y_2,\\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 z_1 \qquad = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} x_2 z_2,\\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 z_1 \qquad = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} y_2 z_2.\end{aligned}\right.$$

En multipliant terme à terme les deux dernières de ces équations et supprimant le facteur commun qui résulte de la considération de la seconde, on trouve

$$k_1 \frac{a_1^3 z_1^2}{r_1^5} + k_2 \frac{a_2^3 z_2^2}{r_2^5} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, ou que *les centres des sphères soient situés dans le plan horizontal.*

Soient φ_1, φ_2 les angles que forment r_1, r_2 avec Ox. Nous avons

$$x_1 = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1, \quad x_2 = r_2 \cos\varphi_2, \quad y_2 = r_2 \sin\varphi_2,$$

et les deux premières des équations (5) deviennent

$$k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \cos 2\varphi_1 = - k_2 \frac{a_2^3}{r_2^3} \cos 2\varphi_2,$$

$$k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \sin 2\varphi_1 = - k_2 \frac{a_1^3}{r_2^3} \sin 2\varphi_2;$$

d'où successivement

$$\operatorname{tang} 2\varphi_1 = \operatorname{tang} 2\varphi_2,$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_2 \pm \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{k_1 a_1^3}{r_1^4} = \dfrac{k_2 a_2^3}{r_2^3}. \end{array} \right.$$

Ainsi *les rayons vecteurs des deux sphères doivent être perpendiculaires entre eux et, si les sphères sont de même nature, proportionnels aux rayons des sphères.*

27. Revenons au cas général où le système est composé d'un nombre quelconque de sphères. Faisons sortir des sommes des équations (4) les éléments qui se rapportent à la sphère (C_1), et considé-

rons comme données les quantités

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}(x_i^2 - y_i^2) = A, \\ \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = B, \\ \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i z_i = C, \\ \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} y_i z_i = D, \end{cases}$$

sauf à établir ultérieurement les conditions que doivent remplir les constantes pour que le problème soit susceptible d'une solution. En posant, comme plus haut,

$$x_i = r_i \cos\varphi_i, \quad y_i = r_i \sin\varphi_i,$$

les équations précitées deviennent

$$(8)\quad \begin{cases} k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \cos 2\varphi_1 = -A, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \sin 2\varphi_1 = -2B, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^4} z_1 \cos\varphi_1 = -C, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^4} z_1 \sin\varphi_1 = -D. \end{cases}$$

De ces équations on déduit d'abord

$$(9)\quad \begin{cases} k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} = \sqrt{A^2 + 4B^2}, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^4} z_1 = \sqrt{C^2 + D^2}, \end{cases}$$

puis

$$(10)\qquad \begin{cases} \tan 2\varphi_1 = \dfrac{B}{2A}, \\ \tan \varphi_1 = \dfrac{D}{C}. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$(11)\qquad 4ADC = B(C^2 - D^2).$$

En admettant que cette condition soit remplie, et que k_1, a_1 soient donnés, les formules ci-dessus feront connaître r_1, z_1 et φ_1.

MOUVEMENTS

DES AIMANTS ET DES COURANTS DÉTERMINÉS PAR LEURS ACTIONS MUTUELLES.

1. *Loi de Biot et Savart.* — Considérons un courant angulaire (*fig.* 1) constant BAB′, dont les deux branches AB, AB′ sont assez longues pour qu'on puisse les considérer comme infinies; concevons que, sur le prolongement extérieur de la bissectrice Ax de l'angle, on dispose le centre O d'une petite aiguille aimantée PP′ qui ne puisse se mouvoir qu'autour d'un axe passant par ce point compris dans le plan du courant et perpendiculaire à Ax.

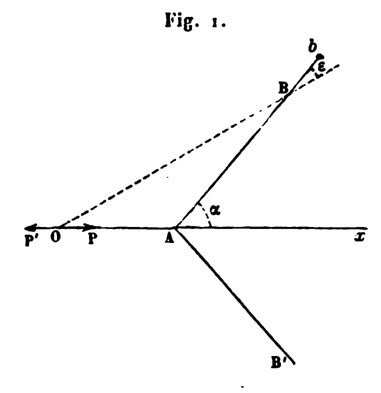
Biot et Savart ont reconnu expérimentalement que *l'aiguille se place perpendiculairement au plan du courant, que l'action exercée sur chacun de ses pôles varie en raison inverse de la distance de ces points au sommet du courant angulaire et qu'elle est proportionnelle à la tangente du quart de l'angle.*

2. *Principe élémentaire de Laplace.* — Soient

i l'intensité du courant;
ν la masse de la particule magnétique censée concentrée au pôle P qui, changée de signe, est la masse semblable concentrée en P′;
a la distance OA;
α l'angle $\widehat{BAx} = \widehat{B'Ax}$;
B un point quelconque de l'une des branches du courant $s = AB$;
ds un élément Bb du courant;
ε son inclinaison sur le prolongement du rayon vecteur OB $= r$.

En négligeant le carré du rapport de la demi-longueur de l'aiguille à

Fig. 1.



r, l'action exercée par ds sur P, en désignant par μ une constante, sera de la forme

$$\mu i v f(r, \varepsilon)\, ds, \tag{1}$$

et sera perpendiculaire au plan BOB'.

L'action totale exercée par le courant sur P aura ainsi pour valeur

$$F = 2\mu i v \int_{\alpha}^{0} f(r, \varepsilon)\, ds. \tag{2}$$

Or on a

$$s = a\,\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sin\varepsilon} = a(\sin\alpha\cot\varepsilon - \cos\alpha),$$

$$ds = -\,a\,\frac{\sin\alpha}{\sin^2\varepsilon}\, d\varepsilon,$$

$$r = a\,\frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon},$$

et l'expression (2) devient

$$F = 2\mu i v a \sin\alpha \int_{0}^{\alpha} f\left(\frac{a\sin\alpha}{\sin\varepsilon'}, \varepsilon\right)\frac{d\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}. \tag{3}$$

Comme cette force doit varier en raison inverse de a, il faut nécessairement que l'on ait une relation de la forme

$$f\left(a\,\frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon'}\,\varepsilon\right) = \frac{f_1(\varepsilon)}{a^2\,\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\varepsilon}}.$$

ce qui revient à poser

$$(4) \qquad f(r, \varepsilon) = \frac{f_1(\varepsilon)}{r^2};$$

alors on a

$$F = \frac{2\mu i \nu}{a \sin\alpha} \int_0^\alpha f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

D'après la loi de Biot et de Savart, on doit avoir

$$\frac{1}{\sin\alpha} \int_0^\alpha f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$$

ou

$$\int_0^\alpha f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha;$$

d'où

$$f_1(\alpha) = \sin\alpha$$

et

$$f_1(\varepsilon) = \sin\varepsilon,$$

$$f(r, \varepsilon) = \frac{\sin\varepsilon}{r^2}.$$

Enfin, pour l'action élémentaire (1) exercée par ds sur P,

$$(5) \qquad \mu i \nu \frac{\sin\varepsilon}{r^2}\,ds.$$

En généralisant ce résultat, on conclut avec Laplace que *l'action exercée par un élément de courant sur une particule magnétique est proportionnelle à l'intensité de courant, à la masse de la particule, à la longueur de l'élément, au sinus de l'inclinaison de l'élément sur le rayon vecteur partant de la particule, à l'inverse du carré de ce rayon; et de plus qu'elle est perpendiculaire au plan déterminé par la particule et l'élément.*

Si l'on désigne par $d\omega$ l'aire du triangle déterminé par ds et ν, on reconnaît facilement que l'expression (5) prend la forme

$$(6) \qquad \frac{2\mu i \nu}{r^3}\,d\omega.$$

En vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction, l'action

exercée par ν sur ds sera aussi représentée par les expressions (5) et (6), mais devra être changée de sens.

Mouvement imprimé à un courant constant par un aimant. — Soient

F, $\mathfrak{M}$ la résultante des actions exercées par l'aimant sur le courant et leur moment par rapport au centre de l'aimant pris pour origine ;
F_x, $\mathfrak{M}_x$ leurs projections sur Ox;
$d\omega_x$ la projection de $d\omega$ sur le plan yOz;
r', $d\omega'$ les valeurs de r, $d\omega$ qui se rapportent à ds et à P.

On a, en employant les mêmes notations en ce qui concerne les axes Oy, Oz,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
F_x &= 2\mu i\nu \int \left(\frac{d\omega_x}{r^3} - \frac{d\omega'_x}{r'^3}\right),\\
F_y &= 2\mu i\nu \int \left(\frac{d\omega_y}{r^3} - \frac{d\omega'_y}{r'^3}\right),\\
F_z &= 2\mu i\nu \int \left(\frac{d\omega_z}{r^3} - \frac{d\omega'_z}{r'^3}\right);\\
\mathfrak{M}_x &= 2\mu i\nu \int \left[y\left(\frac{d\omega_z}{r^3} - \frac{d\omega'_z}{r'^3}\right) - z\left(\frac{d\omega_y}{r_3} - \frac{d\omega_y}{r'^3}\right)\right],\\
\mathfrak{M}_y &= 2\mu i\nu \int \left[z\left(\frac{d\omega_x}{r^3} - \frac{d\omega'_x}{r'^3}\right) - x\left(\frac{d\omega_z}{r^3} - \frac{d\omega'_z}{r'^3}\right)\right],\\
\mathfrak{M}_z &= 2\mu i\nu \int \; x\left(\frac{d\omega_y}{r^3} - \frac{d\omega'_y}{r'^3}\right) - y\left(\frac{d\omega_x}{r^3} - \frac{d\omega'_x}{r'^3}\right).
\end{aligned}\right.$$

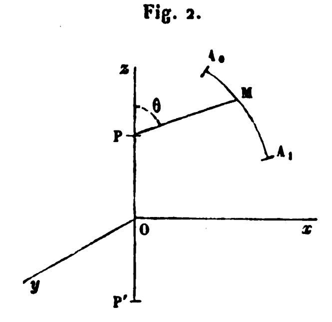
Supposons que l'on prenne la direction de OP par la partie positive de l'axe des z, et soit $2l$ la distance des pôles de l'aimant, on a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}, \qquad r' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+l)^2},\\
&d\omega_x = \frac{y\,dz - (z-l)\,dy}{2}, \qquad d\omega'_x = \frac{y\,dz - (z+l)\,dy}{2},\\
&d\omega_y = \frac{(z-l)\,dx - x\,dz}{2}, \qquad d\omega'_y = \frac{(z+l)\,dx - x\,dz}{2},\\
&d\omega_z = d\omega'_z = \frac{x\,dy - y\,dz}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Au moyen des formules (8) et (9) et des équations du circuit, on déterminera F et $\mathfrak{M}$ en grandeur et en direction; le moment du centre de gravité géométrique G du circuit sera déterminé par F, et le mouvement de rotation autour de ce centre se déduira des formules d'Euler en faisant intervenir les moments principaux d'inertie de ce circuit par rapport à G.

Mouvement d'un courant autour de l'axe d'un aimant. — Soit (*fig.* 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance d'un point M du courant à l'axe Oz.

Fig. 2.



Des formules (7) et (8) on déduit

$$\mathfrak{M}_z = \mu i v \left[\int \frac{(z - l)\, du^2 - u^2 dz}{r^3} - \int \frac{(z + l)\, du^2 - u^2 dz}{r'^3} \right].$$

Si θ est l'angle formé par le rayon vecteur r, avec Oz, on a

$$z - l = - r \cos\theta, \quad u^2 = r^2 \sin^2\theta,$$

et la première intégrale de l'expression précédente se réduit à

$$- \int \sin\theta\, d\theta = \cos\theta_1 - \cos\theta_0,$$

en désignant par θ_0 et θ_1 les valeurs de θ correspondant aux extrémités A_0 et A_1 de l'arc voltaïque. En distinguant par un accent les lettres semblables qui se rapportent au pôle P', on reconnaît que, en défini-

tive, on a simplement

$$(9)\qquad \mathfrak{M}_z = \mu i \nu(\cos\theta_1 - \cos\theta_0 - \cos\theta'_1 + \cos\theta'_0).$$

On voit ainsi que ce moment a la même valeur, quelle que soit la forme de l'arc, pourvu que ses extrémités soient deux points déterminés. Il sera nul et il n'y aura pas de mouvement si le courant est fermé, ou s'il se termine en deux points situés sur l'axe de l'aimant et compris entre les deux pôles, puisque dans ce cas on a

$$\theta_0 = \theta_1 = \pi, \quad \theta'_0 = \theta'_1 = 0.$$

Dans tous les autres cas le mouvement de rotation du courant serait uniformément accéléré sans l'intervention des résistances passives.

Action d'un courant rectiligne indéfini sur un aimant dont la ligne des pôles est perpendiculaire à la direction du courant. — Nous prendrons pour plan de la figure celui qui est mené par la ligne des pôles PP' perpendiculairement au courant dont la trace sera représentée par A.

Soient

$2l =$ PP' la distance des pôles;
Ox la perpendiculaire menée en son milieu O, la partie positive de l'axe des y étant dirigée suivant OP;
x, y les coordonnées de A;
$r = \sqrt{x^2 + (l-y)^2}$, $r' = \sqrt{x^2 + (l+y)^2}$ les distances AP, AP';
α, α' les angles qu'elles forment avec PP'.

Les actions exercées par le courant sur P, P', respectivement perpendiculaires à AP, AP', ont pour composantes, suivant Ox et Oy,

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mu i \nu\left(\dfrac{\cos\alpha}{r} + \dfrac{\cos\alpha'}{r'}\right) \\ \quad = \mu i \nu\left(\dfrac{l-y}{r^2} + \dfrac{l+y}{r'^2}\right) = \dfrac{\mu i \nu}{r^2 r'^2}(x^2 - y^2 + l^2), \end{cases}$$

$$(2)\qquad \mathrm{Y} = \mu i \nu\left(\frac{\sin\alpha}{r} - \frac{\sin\alpha'}{r'}\right) = \mu i \nu\left(\frac{x}{r^2} - \frac{x}{r'^2}\right) = \frac{2\mu i \nu x y}{r^2 r'^2},$$

et leur moment par rapport au point O est

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = \mu i \nu l\left(\frac{\cos\alpha}{r} - \frac{\cos\alpha'}{r'}\right) \\ \quad = \mu i \nu l\left(\frac{l-x}{r^2} - \frac{l+x}{r'^2}\right) = \frac{2\mu i \nu l y}{r^2 r'^2}(l^2 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers.

1° *L'aimant est suspendu à un fil.*

Il tendra à sortir de la verticale en vertu de la force X, et si l'on admet que μi soit positif, le courant agira par attraction ou répulsion selon que A se trouvera entre les deux branches de l'hyperbole équilatère représentée par l'équation

$$x^2 - y^2 + l^2 = 0$$

ou qu'il se trouvera dans l'intérieur de l'une ou l'autre branche.

L'hyperbole est ainsi le lieu géométrique des positions de A pour lesquelles l'aimant ne reçoit aucune influence du courant. Ces divers résultats ont été vérifiés expérimentalement par Boisgiraud.

2° *Une aiguille flotte sur la surface d'une couche d'eau et est dirigée suivant la méridienne magnétique.*

Cette aiguille ne peut se déplacer que suivant la ligne des pôles, et par conséquent sous l'action de la composante Y.

3° *L'aiguille est mobile autour d'un axe mené par son centre parallèlement au courant.*

Le mouvement de rotation sera produit par le moment $\mathfrak{M}$: on voit alors que le courant n'exercera aucune action si sa trace A se trouve sur l'axe Ox ou sur la circonférence ayant son centre en O et dont le rayon est l. En traversant l'une ou l'autre de ces lignes, une attraction se changera en répulsion ou *vice versa*.

Il nous paraît inutile d'aller plus loin dans la discussion de la formule (3).

ÉLASTICITÉ.

ÉLASTICITÉ.

§ I. — Généralités.

1. Lorsqu'un corps solide est soumis à l'action de forces extérieures, ses molécules entrent en mouvement; il se déforme successivement jusqu'au moment où l'équilibre se rétablit entre les forces moléculaires, modifiées par la variation des distances des molécules, et les forces extérieures. Si les intensités de ces dernières forces ne dépassent pas une certaine limite, dès que leur action vient à cesser, le corps reprend sa forme primitive à la suite d'une série de vibrations exécutées par ses molécules.

Tous les corps solides sont élastiques dans certaines limites variables avec leur nature; mais cette propriété ne subsiste que pour des déformations très petites par rapport aux dimensions des corps ou pour des écartements des molécules très faibles par rapport à leurs distances primitives.

De ce que la constitution des corps se modifie pour des déplacements très petits de leurs molécules, il faut conclure que la fonction $f(r)$ de la distance r de deux molécules, dont dépend leur action mutuelle, décroît très rapidement lorsque r augmente et devient insensible dès que cette distance atteint une certaine limite r_1, très petite d'ailleurs. Il résulte de là que les actions exercées sur une molécule m du corps par toutes les autres se réduisent à celles qui proviennent de celles des molécules situées dans la *sphère d'activité* de cette molécule dont le rayon r_1 est très petit.

Nous ne nous occuperons dans ce qui suit que des corps qui, à l'état

naturel, c'est-à-dire soustraits à l'action de toute force extérieure, sont homogènes dans toutes leurs parties.

L'étude de l'élasticité exige d'abord la connaissance du sujet que nous allons traiter dans le paragraphe suivant.

§ II. — De l'équilibre intérieur d'un corps, quel qu'en soit l'état physique ou la nature.

2. *De la pression dans l'intérieur d'un système matériel.* — Concevons un plan indéfini PP_1 qui divise en deux parties (A) et (A′) un système de points matériels, et dans ce plan un élément superficiel $d\omega$; soient m, m' deux points matériels appartenant respectivement à (A), (A′), choisis de manière que la droite mm' traverse $d\omega$. La masse m sera soumise de la part de la masse m' à l'action d'une force attractive ou répulsive dirigée suivant la droite mm'; toutes les forces moléculaires pareilles provenant de (A′), traversant $d\omega$, transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité G de cet élément, auront une résultante de l'ordre de $d\omega$, que l'on peut représenter par $p\,d\omega$ et qui est ce que l'on appelle la *pression élémentaire* exercée par (A′) sur $d\omega$. Le coefficient p, ou la *pression sur* $d\omega$ *rapportée à l'unité de surface*, est désigné simplement sous le nom de *pression*, au point G du plan PP_1; cette pression peut se décomposer en deux forces : l'une p_n est dirigée suivant la normale ON au plan PP_1, l'autre p_t, dite *tangentielle*, est comprise dans ce plan.

La dénomination de pression suppose que la direction de p_n traverse (A); dans le cas contraire où cette direction est comprise dans (A′), la pression devient une *traction*. Mais, pour plus de simplicité dans le langage, nous n'emploierons pour p_n que la dénomination de *pression normale*, sauf à la considérer comme négative quand elle devient une traction.

La pression élémentaire $p\,d\omega$ n'est autre chose que l'effort que l'on devrait exercer sur $d\omega$, sans changer les conditions dans lesquelles se trouve cet élément, si l'on venait à supprimer la portion de (A′) qui agit moléculairement à travers cet élément. Il est clair d'ailleurs que la pression exercée par (A) sur (A′) est égale à p changé de sens.

Nous représenterons en général par p_u la pression exercée sur un élé-

ment perpendiculaire à un axe Ou et par $p_{u,v}$ la composante de cette pression estimée parallèlement à un axe Ov.

3. *Du parallélépipède élémentaire.* — Nous rapporterons le système matériel à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

Concevons maintenant que le système soit décomposé en parallélépipèdes élémentaires par trois séries de plans parallèles aux plans coordonnés. Soient :

x, y, z les coordonnées du sommet M le plus voisin de l'origine de l'un de ces parallélépipèdes ;
dx, dy, dz les dimensions du parallélépipède parallèle à ces axes ;
$da = dy\,dz$, $db = dz\,dx$, $dc = dx\,dy$ ses faces perpendiculaires à Ox, Oy, Oz ;
D la densité du corps en M ;
X, Y, Z les composantes de l'accélération de la résultante des forces extérieures qui sollicitent le parallélépipède, en y comprenant l'inertie s'il y a lieu

Les deux faces da sont soumises respectivement aux forces parallèles $da.p_{xx}$, $-da\left(p_{xx} + \frac{dp_{xx}}{dx}dx\right)$ qui se réduisent à

$$-dx\,dy\,dz\,\frac{dp_{xx}}{dx}.$$

Les couples de faces db, dc donnent de même suivant Ox les composantes

$$-dx\,dy\,dz\,\frac{dp_{yz}}{dy}, \quad -dx\,dy\,dz\,\frac{dp_{zx}}{dz}$$

qui, jointes à la précédente, font équilibre à D $dx\,dy\,dz$ X, ce qui donne l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = \text{DX},\\ &\text{et de même}\\ &\frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{zy}}{dz} = \text{DY},\\ &\frac{dp_{zz}}{dz} + \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} = \text{DZ}.\end{aligned}\right.$$

Concevons que, par le centre du parallélépipède, où passent les directions de p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, X, Y, Z, on mène une parallèle à Oz. Les moments, par rapport à cette droite, des forces qui sollicitent le parallélépipède, se réduisent à ceux des composantes des pressions respectivement parallèles à db et da, ce qui donne, en exprimant que leur somme est nulle,

$$db.p_{yx}\frac{dy}{2}+db\left(p_{yx}+\frac{dp_{yx}}{dy}dy\right)\frac{dy}{2}-da.p_{xy}\frac{dx}{2}-da\left(p_{xy}+\frac{dp_{xy}}{dx}dx\right)\frac{dx}{2}=0;$$

d'où, en remplaçant da et db par leurs valeurs, divisant par $\frac{dx\,dy\,dz}{2}$, et ne conservant que les quantités finies,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_{yx}=p_{xy},\\ &\text{et de même}\\ &p_{zx}=p_{xz},\\ &p_{yz}=p_{zy}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi donc on peut intervertir l'ordre des deux lettres des indices des composantes des pressions.

En se donnant la fonction de x, y, z ou de p_x, p_y, p_z qui représente la densité, les six équations (1) et (2) sont insuffisantes pour déterminer les neuf composantes des pressions : il faudra leur en ajouter trois autres qui définiront la nature du corps.

4. *Du tétraèdre élémetnaire.* — Considérons le tétraèdre déterminé par les arêtes dx, dy, dz partant du sommet M.

Soient :

$d\omega'$ la base;
α, β, γ les angles que forme la normale à $d\omega'$ avec Ox, Oy, Oz;
$da = \cos\alpha\, d\omega'$, $db = \cos\beta\, d\omega'$, $dc = \cos\gamma\, d\omega'$ les faces des tétraèdres parallèles aux plans yOz, zOx, xOy;
p' la pression exercée sur $d\omega'$.

Les pressions $da.p_x$, $db.p_y$, $dc.p_z$ et la pression $d\omega'.p'$, prise en sens con-

traire, qui sont du second ordre, font équilibre à la résultante des forces extérieures; mais cette résultante est de l'ordre du volume, c'est-à-dire du troisième, et par conséquent peut être considérée comme nulle; on a donc en projection sur l'axe Ox

$$da \cdot p_{xx} + db \cdot p_{yx} + dc \cdot p_{zx} - d\omega' \cdot p'_x = 0,$$

d'où

(3)

$$p'_x = p_{xx}\cos\alpha + p_{yx}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma$$

et de même

$$p'_y = p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{zy}\cos\gamma,$$
$$p'_z = p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma.$$

Telles sont les relations qui lient les composantes de la pression p' aux six fonctions $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}$ qui vérifient les équations aux différentielles partielles (1).

Remarques. — 1° La première des formules (3) exprime que la composante suivant Ox de la pression sur $d\omega'$ est égale à la pression sur da estimée suivant la normale à $d\omega'$; d'où ce théorème :

Si p' et p'' sont des pressions relatives à deux éléments $d\omega'$ et $d\omega''$ passant par un même point ayant pour normales N′ et N″, la projection de p' sur N″ est égale à la projection de p'' sur N′, ou autrement

$$p'\cos(p', N'') = p''\cos(p'', N'),$$

ce qui constitue le théorème de l'*égalité des composantes normales réciproques*.

2° La composante de la pression p', normale à l'élément correspondant, est

$$p'_n = p'_x\cos\alpha + p'_y\cos\beta + p_z\cos\gamma,$$

d'où

$$(3') \quad \begin{cases} p'_n = p_{xx}\cos^2\alpha + p_{yy}\cos^2\beta + p_{zz}\cos^2\gamma \\ \qquad + 2p_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2p_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2p_{yz}\cos\beta\cos\gamma. \end{cases}$$

5. *Ellipsoïde des pressions.* — Rapportons aux trois axes Mx', My', Mz' respectivement parallèles à p_x, p_y, p_z le lieu géométrique de l'ex-

trémité n de la droite qui représente la pression p' pour toutes les orientations de l'élément $d\omega'$.

Soient x', y', z' les coordonnées du point n. En supposant les axes Ox, Oy, Oz transportés parallèlement à eux-mêmes en M, on a

$$(a) \qquad \cos(x', x) = \frac{p_{xx}}{p_x}, \quad \cos(y', x) = \frac{p_{yx}}{p_y}, \quad \cos(z', x) = \frac{p_{zx}}{p_z},$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} p'_x = \dfrac{p_{xx}}{p_x} x' + \dfrac{p_{yx}}{p_y} y' + \dfrac{p_{zx}}{p_z} z', \\ \text{et de même} \\ p'_y = \dfrac{p_{xy}}{p_x} x' + \dfrac{p_{yy}}{p_y} y' + \dfrac{p_{zy}}{p_z} z', \\ p'_z = \dfrac{p_{xz}}{p_x} x' + \dfrac{p_{yz}}{p_y} y' + \dfrac{p_{zz}}{p_z} z'. \end{cases}$$

Il résulte de la comparaison des formules (3) et (4) que

$$(5) \qquad \cos\alpha = \frac{x'}{p_x}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{p_y}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{p_z},$$

d'où

$$(6) \qquad \left(\frac{x'}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{y'}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{z'}{p_z}\right)^2 = 1$$

pour l'équation du lieu cherché, qui est ainsi *un ellipsoïde pour lequel les pressions correspondant à trois éléments rectangulaires forment un système de diamètres conjugués.*

6. Nous allons maintenant démontrer que *la pression sur un élément plan au point* M *coïncidant avec l'un ou l'autre des trois plans principaux de l'ellipsoïde lui est normale.* A cet effet, supposons que l'on oriente les axes Ox, Oy, Oz de manière que Mx', My', Mz' coïncident avec les axes principaux et soient P, P′, P″ ce que deviennent p_x, p_y, p_z. Nous avons d'abord

$$(7) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{p_{xx}}{P}\right)^2 + \left(\dfrac{p_{xy}}{P}\right)^2 + \left(\dfrac{p_{xz}}{P}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{p_{yy}}{P'}\right)^2 + \left(\dfrac{p_{yx}}{P'}\right)^2 + \left(\dfrac{p_{yz}}{P'}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{p_{zz}}{P''}\right)^2 + \left(\dfrac{p_{zx}}{P''}\right)^2 + \left(\dfrac{p_{zy}}{P''}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

En se reportant aux formules (a) et exprimant que la somme des carrés des cosinus des angles que forme Mx avec Mx', My', Mz' est égale à l'unité, on a

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{p_{xx}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{xy}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{xz}}{P''}\right)^2 = 1, \\ \text{et de même} \\ \left(\frac{p_{yx}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{yy}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{yz}}{P''}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{p_{zx}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{zy}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{zz}}{P''}\right)^2 = 1. \end{array}\right.$$

En éliminant p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} entre les équations (7) et (8), il vient

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{xy}^2\left(\frac{1}{P'^2} - \frac{1}{P^2}\right) + p_{xz}^2\left(\frac{1}{P''^2} - \frac{1}{P^2}\right) = 0, \\ p_{yx}^2\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{P'^2}\right) + p_{yz}^2\left(\frac{1}{P''^2} - \frac{1}{P'^2}\right) = 0, \\ p_{zx}^2\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{P''^2}\right) + p_{zy}^2\left(\frac{1}{P'^2} - \frac{1}{P''^2}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Supposons $P^2 > P'^2 > P''^2$: la première de ces équations exige que $p_{xy} = 0$, $p_{xz} = 0$ et les deux autres que $p_{zy} = 0$; de sorte que Mx', My', Mz' doivent coïncider avec Ox, Oy, Oz, ce qui démontre la proposition énoncée. Les pressions P, P′, P″, dirigées suivant les axes principaux de l'ellipsoïde, ont reçu le nom de *pressions principales*.

7. *Détermination des pressions principales*. — En supposant $p = P$, on a

$$(b)\qquad p'_x = P\cos\alpha,\quad p'_y = P\cos\beta,\quad p'_z = \cos\gamma,$$

et les équations (3) deviennent, en éliminant les cosinus,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} p'_x(p_{xx} - P) + p_{xy}p'_y + p_{xz}p'_z = 0, \\ p'_y(p_{yy} - P) + p_{yx}p'_x + p_{yz}p'_z = 0, \\ p'_z(p_{zz} - P) + p_{xz}p'_x + p_{yz}p'_z = 0; \end{array}\right.$$

d'où, par l'élimination des rapports $\frac{p'_x}{p'_z}$, $\frac{p'_y}{p'_z}$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & P^3-(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})P^2+(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^2-p_{xz}^2-p_{yz}^2)P \\ & \qquad -(p_{xx}p_{yy}p_{zz}+2p_{xy}p_{xz}p_{yz}-p_{xx}p_{yz}^2-p_{yy}p_{xz}^2-p_{zz}p_{xy}^2)=0, \end{aligned}\right.$$

équation du troisième degré dont les racines seront les valeurs des pressions principales, P, P', P''. Si cette équation a des racines négatives, chacune d'elles correspondra à une traction.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, d'après l'équation précédente, on a

$$(11')\quad \left\{\begin{aligned} & P+P'+P''=p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}, \\ & p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^2-p_{yz}^2+p_{xz}^2=PP'+PP''+P'P''. \end{aligned}\right.$$

Les équations (b) et (10) donnent

$$\begin{aligned} & P\cos\alpha(p_{xx}-P)+p_{xy}P\cos\beta+p_{xz}P\cos\gamma=0, \\ & P\cos\beta(p_{yy}-P)+p_{yx}P\cos\alpha+p_{yz}P\cos\gamma=0, \\ & P\cos\gamma(p_{zz}-P)+p_{xz}P\cos\alpha+p_{yz}P\cos\beta=0, \end{aligned}$$

et les dernières feront connaître les angles que forment, avec Ox, Oy, Oz, les axes principaux correspondant aux valeurs P, P', P'' de P.

Nous pouvons donc supposer maintenant que l'ellipsoïde est rapporté à ses axes principaux ou qu'il est représenté par

$$(12)\qquad \left(\frac{x}{P}\right)^2+\left(\frac{y}{P'}\right)^2+\left(\frac{z}{P''}\right)^2=1.$$

Remarque. — Comme nous avons maintenant $p_{xx}=P$, $p_{yy}=P'$, $p_{zz}=P''$, $p_{xy}=0$, $p_{xz}=0$, $p_{yz}=0$, l'équation (3') du n° **3** donne, pour la composante normale de la pression p',

$$(3'')\qquad p'_n=P\cos^2\alpha+P'\cos^2\beta+P''\cos^2\gamma.$$

Portons sur la normale, à partir du point G, une longueur

$$Gn=\frac{1}{\sqrt{\pm p'_n}},$$

en prenant le signe + ou le signe — selon que p'_n est positif ou négatif ; si nous désignons par x, y, z les coordonnées du point n, l'équation précédente devient

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = \pm 1,$$

et représente une surface du second degré à laquelle nous ne croyons pas devoir nous arrêter.

8. *Orientation d'un élément plan soumis à une pression dont la direction est donnée.* — Soit p' la pression dont il s'agit. L'équation du plan auquel appartient l'élément est

(13) $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0.$$

Par suite de l'égalité des composantes réciproques, on a

(14) $$P \cos\alpha = p'_x, \quad y \cos\beta = p'_y, \quad z \cos\gamma = p'_z,$$

de sorte que l'équation du plan devient

(15) $$\frac{x p'_x}{P} + \frac{y p'_y}{P} + \frac{z p'_z}{P} = 0.$$

Donc *le plan de l'élément est parallèle au plan tangent à la surface du second degré*

(16) $$\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} + \frac{z^2}{P''} = \pm k^2,$$

mené au point où la direction de la pression vient la rencontrer, k étant une constante quelconque.

Des formules (3″) et (14) on déduit

(c) $$p'_n = \frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} + \frac{z^2}{P''},$$

en désignant maintenant par x, y, z les coordonnées du point de l'ellipsoïde des pressions déterminé par la direction de p'.

Lorsque les pressions principales sont de même signe ou sont trois pressions proprement dites ou trois tractions, la surface (16) est un ellipsoïde et p' est de même nature que les pressions principales. Dans le cas où ces dernières sont égales, les ellipsoïdes (12) et (16) deviennent des sphères; toutes les pressions sont égales et normales aux éléments correspondants.

Lorsque l'une des pressions principales est de signe contraire aux deux autres, la surface (16) représente deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes. Si la direction de p' rencontre le premier, cette pression est de même nature que les deux pressions principales de même signe; le contraire a lieu si la direction de p' rencontre le second hyperboloïde. Le passage de l'une à l'autre nature des pressions a lieu sur le cône asymptotique

$$\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} + \frac{z^2}{P''} = 0,$$

ce qui, d'après la formule (c), exprime que la composante normale de la pression p' est nulle; cette pression est donc dirigée suivant la génératrice du cône qui passe par l'élément qui lui correspond, d'où le nom de *cône de glissement* donné au cône asymptotique.

Supposons que l'une des pressions principales P'' soit nulle; l'élément plan en M perpendiculaire à Mz n'est soumis à aucune pression et, de l'égalité des composantes normales réciproques, on déduit que le plan de l'élément ci-dessus contiendra les pressions exercées sur tous les éléments superficiels passant par M. L'expression $\frac{z}{P''} = \frac{p'_z}{P''}$, dans l'équation (12), se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; pour en avoir la valeur, il suffit de remonter aux équations (14), et on reconnaît qu'elle représente le cosinus de l'angle γ que forme la normale à l'élément $d\omega'$ avec l'axe Mz. L'équation dont il s'agit devient

$$(12') \qquad \frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{P'^2} = \sin^2\gamma,$$

et l'on voit que les pressions sur tous les éléments plans appartenant à un cône de révolution autour de Mz, dont la demi-ouverture

est γ, sont les demi-diamètres d'une ellipse dont les demi-axes sont $\frac{P}{\sin\gamma}$, $\frac{p'}{\sin\gamma}$. L'équation (15) du plan $d\omega'$ devient

$$(15') \qquad x\frac{p'_x}{P} + y\frac{p'_y}{P'} + z\cos\gamma = 0,$$

dont la trace sur le plan $x\mathrm{M}y$ est tangente à la courbe dont l'équation est

$$(16') \qquad \frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} = \pm k^2,$$

au point où cette courbe est rencontrée par la direction de p'. L'équation (16') est celle d'une ellipse si P et P' sont de même signe, et, dans le cas contraire, de deux hyperboles équilatères conjuguées dont les asymptotes remplacent le cône de glissement.

Supposons maintenant que deux pressions principales P' et P'' soient nulles. Toutes les pressions auront la direction P, et, pour déterminer la pression p' sur la normale N', le théorème de l'égalité des composantes normales réciproques nous donnera

$$p' = \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, \mathrm{N}').$$

9. *Équations de l'équilibre intérieur en coordonnées cylindriques.* — Concevons que le corps soit divisé en éléments par trois séries de surfaces orthogonales : la première composée de cylindres circulaires ayant le même axe OZ; la seconde de plans perpendiculaires à cet axe, et la troisième de plans passant par le même axe.

Soient (*fig.* 1)

z la distance du point C, où un plan $\mathrm{CAA_1}$ de la deuxième série coupe l'axe OZ, à un point fixe O de cet axe;
θ l'angle que forme un plan quelconque OCA de la troisième série avec un plan fixe de cette série;
$r = \mathrm{CA}$ le rayon d'un cylindre de révolution autour de OZ.

Les grandeurs z, θ, r déterminent les trois surfaces orthogonales, par suite leur intersection A dont elles sont les coordonnées.

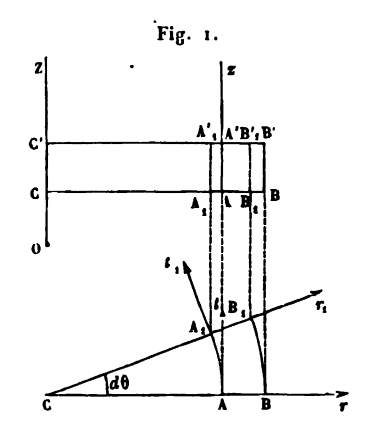
Soient de plus

$d\theta = \widehat{ACA_1}$ l'accroissement infiniment petit de θ, AA_1 étant l'élément de cercle de rayon r;

BB_1 l'arc de cercle du même centre, de rayon $r + dr$, ce qui suppose $AB = A_1B_1 = dr$.

Concevons maintenant un plan $C'A'A_1$ parallèle à CAA_1, et qui en

Fig. 1.



soit distant de $CC' = dz$; nous déterminerons ainsi un élément de volume dont la masse est $D\,dr\,dz\,r\,d\theta$.

Soient

Ar le prolongement de CA;

At la portion de la perpendiculaire à cette droite située dans le plan CAA_1, qui rencontre CA_1;

A_1r_1, A_1t_1 les positions que prennent Ar, At, en supposant que CA tourne de $d\theta$;

Az la parallèle en A à OZ;

T, R, Z les composantes suivant At, Ar, Az de l'accélération de force extérieure qui sollicite la masse $D.\,dr\,dz.\,r\,d\theta$,

p_{tt}, p_{tr}, p_{tz} | les composantes suivant | $AA'BB' = dr\,dz$,
p_{rt}, p_{rr}, p_{rz} | At, Ar, Az | $AA_1A'A'_1 = r\,d\theta\,dz$,
p_{zt}, p_{zr}, p_{zz} | de la pression exercée sur les faces | $AA_1BB_1 = r\,d\theta\,dr$,

en donnant ainsi de l'extension au système de notations du n° 2, ce qui permet d'intervertir l'ordre des lettres des indices.

Il est bon de remarquer, avant d'aller plus loin, que si une force F est dirigée suivant $A_1 t_1$, ses projections sur At et Ar sont respectivement F et $-F\,d\theta$, et que si F est dirigé suivant $A_1 r_1$, ses projections sur les mêmes directions sont $F\,d\theta$ et F.

Cela posé, sur les faces opposées $AA'BB'$, $A_1A'_1B_1B'_1$ s'exercent respectivement les pressions élémentaires

$$\left.\begin{array}{lll} dr\,dz\,p_{tt} & \text{suivant} & At \\ -dr\,dz\left(p_{tt}+\frac{dp_{tt}}{d\theta}d\theta\right) & \text{»} & A_1t_1 \end{array}\right\} \text{qui se réduisent à} \left\{\begin{array}{lll} -dr\,dz\,d\theta\,\frac{dp_{tt}}{d\theta} & \text{suivant} & At \\ dr\,dz\,d\theta\,p_{tt} & \text{»} & Ar \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} dr\,dz\,p_{tr} & \text{»} & Ar \\ -dr\,dz\left(p_{tr}+\frac{dp_{tr}}{d\theta}d\theta\right) & \text{»} & A_1r_1 \end{array}\right\} \text{qui se réduisent à} \left\{\begin{array}{lll} -dr\,dz\,d\theta\,\frac{dp_{tr}}{d\theta} & \text{»} & Ar \\ -dr\,dz\,d\theta\,p_{tr} & \text{»} & At \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} dr\,dz\,p_{t,z} & \text{»} & Az \\ -dr\,dz\left(p_{tz}+\frac{dp_{tz}}{d\theta}d\theta\right) & \text{»} & Az \end{array}\right\} \text{qui se réduisent à} \quad -dr\,dz\,d\theta\,\frac{dp_{tz}}{d\theta} \quad \text{»} \quad Az$$

Pour les deux autres couples de faces, les pressions semblables ont la même direction et chaque couple ne donne qu'une seule résultante.

On a, pour la face $AA_1A'A'_1$ et son opposée,

$$\left.\begin{array}{l} r\,d\theta\,dz\,p_{rr} \\ -d\theta\,dr\left(rp_{rr}+\frac{drp_{rr}}{dr}dr\right) \end{array}\right\} = -dr\,dz\,d\theta\left(p_{rr}+r\frac{dp_{rr}}{dr}\right) \text{suivant } Ar,$$

$$\left.\begin{array}{l} r\,d\theta\,dz\,dp_{rt} \\ -d\theta\,dr\left(rp_{rt}+\frac{drp_{rt}}{dr}dr\right) \end{array}\right\} = -dr\,dz\,d\theta\left(p_{rt}+r\frac{dp_{rt}}{dr}\right) \quad \text{»} \quad At,$$

$$\left.\begin{array}{l} r\,d\theta\,dz\,p_{rz} \\ -d\theta\,dz\left(rp_{rz}+r\frac{dp_{rz}}{dr}\right) \end{array}\right\} = -dr\,dz\,d\theta\left(p_{rz}+r\frac{dp_{rz}}{dr}\right) \quad \text{»} \quad Az.$$

Enfin on trouve facilement, pour le troisième couple de faces,

$$- r\,d\theta\,dz\,dr\,\frac{dp_{zz}}{dz} \text{ suivant } Az,$$

$$- r\,d\theta\,dz\,dr\,\frac{dp_{rt}}{dz} \quad \text{»} \quad At,$$

$$- r\,d\theta\,dz\,dr\,\frac{dp_{zr}}{dz} \quad \text{»} \quad Ar.$$

Si maintenant, pour chacune des trois directions considérées, on fait la somme des composantes des pressions élémentaires et de la projection correspondante de la force extérieure, on trouve, pour les équations cherchées,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dp_{rt}}{d\theta} + \frac{dp_{rz}}{dz} + \frac{p_{rr}-p_{tt}}{r} = \mathrm{DR},\\ &\frac{1}{r}\frac{dp_{tt}}{d\theta} + \frac{dp_{tr}}{dr} + \frac{dp_{tz}}{dz} + \frac{2}{r}p_{tr} = \mathrm{DT},\\ &\frac{dp_{zz}}{dz} + \frac{1}{r}\frac{dp_{zt}}{d\theta} + \frac{dp_{zr}}{dr} + \frac{1}{r}p_{rz} = \mathrm{DZ}.\end{aligned}\right.$$

10. *Équations de l'équilibre intérieur en coordonnées sphériques.* — Concevons que le corps soit divisé en éléments de volume par trois séries de surfaces orthogonales : la première formée de sphères ayant pour centre commun l'origine O; la seconde, de cônes de révolution ayant pour axe une droite fixe Oz; la troisième, de plans menés par cette droite.

Soient A (*fig.* 2) l'intersection de trois de ces surfaces; $r = \mathrm{OA}$ le rayon de la sphère; θ la demi-ouverture AOZ du cône, ou la *colatitude;* ψ la *longitude* ou l'angle formé par le plan ZOA, avec un plan fixe ZOX.

En faisant varier : 1° r de dr, nous obtiendrons le point B; 2° θ de $d\theta$, les points A et B viendront en A′, B′; 3° ψ de $d\psi$, les points A, B, A′, B′ viendront en A_1, B_1, A'_1, B'_1.

La masse de l'élément de volume $AA_1AA'_1BB'B_1B'_1$ a pour expression

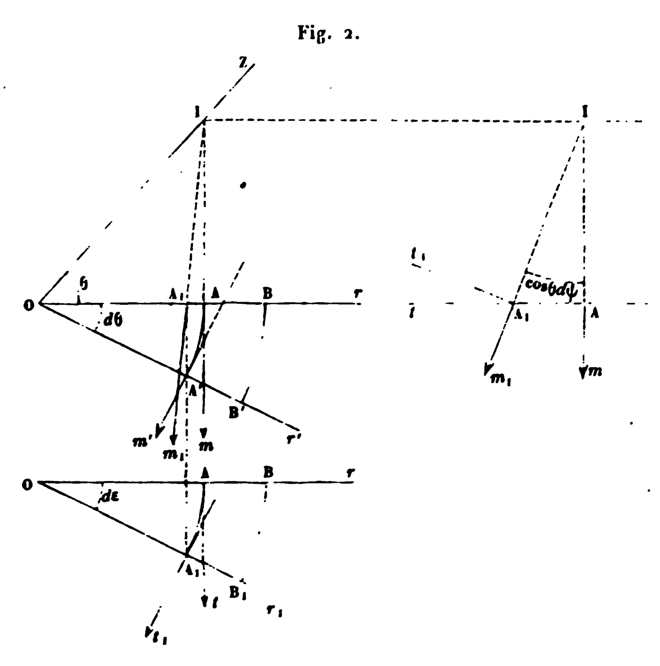
$$(a)\qquad \mathrm{D}\,dr.r^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi;$$

comme $AA_1 = r \sin\theta \, d\psi$, on a, pour l'angle AOA_1

$$(b) \qquad d\varepsilon = \sin\theta \, d\psi.$$

Soient Ar le prolongement de OA; At la portion de la tangente au parallèle dirigée dans le sens de l'accroissement de ψ; Am la partie de

Fig. 2.



la méridienne dirigée vers l'équateur XOY; R, M, T les composantes de l'accélération de la force extérieure qui agit en A, estimées respectivement suivant les axes auxiliaires Ar, Am, At; A_1m_1, A_1t_1 les équivalents de Am, At pour le point A_1; $A'm'$, $A't'$ les droites semblables relatives au point A'; I l'intersection sur OZ des directions de Am, A_1m_1.

On reconnaît facilement que

$$(c) \qquad \widehat{AIA_1} = \frac{AA_1}{AI} = \cos\theta \, d\psi,$$

$$(d) \qquad \cos(m, t_1) = \cos(90^\circ - \widehat{AIA_1}) = -\cos\theta \, d\psi.$$

Cela posé, nous avons, pour les résultantes des pressions élémentaires

... son opposée

... suivant A r,

... A m.

... A t,

... son opposée ...

... suiv. A r

... A m

... A m

... A r

... A t

... A r,

... A t,

... A m.

... A t.

... A t.

... A r.

... A m

En égalant respectivement à zéro la somme des composantes des pressions élémentaires estimées suivant Ar, Am, At ajoutée à la composante de la force extérieure, il vient

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d\sin\theta p_{mr}}{d\theta} + \frac{dp_{rt}}{d\psi}\right) + \frac{2p_{rr} - p_{mm} - p_{tt}}{r} = \mathrm{DR},\\
&\frac{dp_{mr}}{dr} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d\sin\theta p_{mm}}{d\theta} + \frac{dp_{mt}}{d\psi}\right) + \frac{3p_{mr} - \cot\theta . p_{tt}}{r} = \mathrm{DM},\\
&\frac{dp_{tr}}{dr} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d\sin\theta p_{tm}}{dt} + \frac{dp_{tt}}{d\psi}\right) + \frac{3p_{rt} + \cot\theta p_{tm}}{r} = \mathrm{DT}.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations qu'il s'agissait d'établir et que l'on peut mettre encore sous la forme suivante :

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{dp_{mr}}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{dp_{rt}}{d\psi}\right) + \frac{2p_{rr} - p_{mm} - p_{tt} + p_{mr}\cot\theta}{r} = \mathrm{DR},\\
&\frac{dp_{mr}}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{dp_{mm}}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{dp_{mt}}{d\psi}\right) + \frac{3p_{mr} + (p_{mm} - p_{tt})\cot\theta}{r} = \mathrm{DM},\\
&\frac{dp_{tr}}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{dp_{tm}}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{dp_{tt}}{d\psi}\right) + \frac{3p_{rt} + 2p_{tm}\cot\theta}{r} = \mathrm{DT}.
\end{aligned}\right.$$

§ III. — Équations générales de l'équilibre intérieur d'un corps élastique isotrope.

11. *Sommations qui représentent les composantes des pressions.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes coordonnés rectangulaires, G le centre de gravité d'un élément superficiel $ab = d\omega$ compris dans un corps homogène et dont le plan est perpendiculaire à l'un des trois axes ci-dessus, à Oz si l'on veut, pour fixer les idées.

Pour nous, une molécule m sera située *au-dessous* du plan de $d\omega$, quand sa coordonnée parallèle à Oz sera inférieure à celle de G.

Désignons par m' une molécule située au-dessus de ab, telle que la droite $mm' = r$ traverse $d\omega$, et par $mm'f(r)$ l'action moléculaire exercée par m sur m'.

Considérons d'abord des couples de molécules m, m' comprises dans un cylindre ayant pour base $d\omega$ et dont les génératrices aient une direction déterminée.

Si nous admettons d'abord que r reste constant, nous aurons la résultante

$$mf(r)\,\mathrm{D}\,d\omega\,r\cos(r,z),$$

et il faudra faire la somme de toutes les expressions semblables, en faisant varier r depuis o jusqu'au rayon de la sphère d'activité.

Nous avons donc parallèlement à l'axe des x la composante de la pression

$$p_{zx} = \mathrm{D}\,\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos(r,z)\cos(r,x).$$

La somme est relative à toutes les orientations d'un rayon partant de G, mais situé au-dessus de $d\omega$; mais cette somme est la moitié de celle que l'on obtiendrait en faisant tourner le rayon r dans tous les sens autour de G. En nous plaçant à ce nouveau point de vue, nous aurons

$$(1)\quad \begin{cases} p_{zx} = \dfrac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos(r,z)\cos(r,x), \\ \text{et de même} \\ p_{zy} = \dfrac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos(r,z)\cos(r,y), \\ p_{zz} = \dfrac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos^2(r,z). \end{cases}$$

D'après le mode de raisonnement que nous avons adopté, on voit que les choses se passent comme si, toutes les molécules m se trouvant placées en G, les molécules m' rayonnaient autour de ce point.

Soient x, y, z les coordonnées du point G, $x+h, y+k, z+l$ celles d'une molécule quelconque située dans la sphère d'activité de ce point. Nous avons

$$\cos(r,x) = \frac{h}{r},\quad \cos(r,y) = \frac{k}{r},\quad \cos(r,z) = \frac{l}{r},$$

et, en posant $\varphi(r) = \dfrac{f(r)}{r}$, les formules (1) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} p_{zx} = \dfrac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\,m\varphi(r)lh, \\ p_{zy} = \dfrac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\,m\varphi(r)lk, \\ p_{zz} = \dfrac{\mathrm{D}}{2}\,\mathrm{Som}\,m\varphi(r)l^2. \end{cases}$$

Ces expressions sont nulles lorsque le corps considéré est à l'état naturel, ce que nous supposerons dans ce qui suit.

12. *Expression des pressions en fonction des déplacements.* — Admettons que, sous l'action de forces extérieures, le point G éprouve un déplacement dont nous représenterons par u, v, w les projections sur Ox, Oy, Oz. Nous ne conserverons que les premières puissances de ces déplacements et de leurs dérivées partielles. L'élément de volume $dx\,dy\,dz$ est devenu

$$(dx+du)(dy+dv)(dz+dw) = dx\,dy\,dz\left(1+\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right).$$

La dilatation cubique est ainsi

$$\Delta = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}. \tag{3}$$

La densité dans la sphère d'activité de G est devenue

$$D' = \frac{D}{1+\Delta} = D\left(1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dz}{dw}\right). \tag{4}$$

Soient $\delta h, \delta k, \delta l, \delta r$ les variations éprouvées par h, k, l, r. Nous aurons, par exemple,

$$\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{D'}{2}\operatorname{Som} m\varphi(r+\delta r)(l+\delta l)(h+\delta h) \\ &= \frac{D'}{2}\operatorname{Som} m\varphi(r)lh + \frac{D}{2}\operatorname{Som} m[\varphi'(r)lh\delta r + \varphi(r)l\delta h + \varphi(r)h\delta l]. \end{aligned}$$

Or le premier terme de cette expression est nul avec les termes en δ; il vient donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{D}{2}\operatorname{Som} m[\varphi'(r)lh\delta r + \varphi(r)(l\delta h + h\delta l)], \\ &\text{et de même} \\ p_{zy} &= \frac{D}{2}\operatorname{Som} m[\varphi'(r)lk\delta r + \varphi(r)(l\delta k + k\delta l)], \\ p_{zz} &= \frac{D}{2}\operatorname{Som} m[\varphi'(r)l^2\delta r + 2\varphi(r)l\delta l]. \end{aligned}\right.$$

Mais δh notamment n'est autre chose que l'accroissement que prend u quand on y remplace x, y, z par $x + h, y + k, z + l$; nous avons donc

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \delta h &= \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l, \\ &\text{et de même} \\ \delta k &= \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k + \frac{dv}{dz}l, \\ \delta l &= \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \frac{dw}{dz}l, \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \delta r &= \frac{h\,\delta h + k\,\delta k + l\,\delta l}{r} \\ &= \frac{1}{r}\Big[h^2\frac{du}{dx} + k^2\frac{dv}{dy} + l^2\frac{dw}{dz} \\ &\qquad + hk\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + hl\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) + kl\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\Big]. \end{aligned}\right.$$

Concevons que l'on substitue la valeur (7) dans les formules (5), puis les valeurs (6); on fera ensuite sortir $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dx}, \cdots$ des signes Som. Mais le calcul se simplifie notablement si l'on remarque que : 1° en raison de la symétrie, les sommes renfermant h, k, l à des puissances impaires sont nulles, puisqu'elles doivent avoir la même valeur en changeant les signes de ces variables; 2° d'après la troisième des équations (2), on a

$$\text{Som}\, m\varphi(r)\,l^2 = 0;$$

par suite,

$$0 = \text{Som}\, m\varphi(r)h^2 = \text{Som}\, m\varphi(r)k^2 = \text{Som}\, m\varphi(r)l^2 = \text{Som}\, m\varphi(r)r^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$\text{Som}\, m\,\frac{\varphi'(r)}{r}\,h^2l^2 = \text{Som}\, m\,\frac{\varphi'(r)}{r}\,h^2k^2 = \text{Som}\, m\,\frac{\varphi'(r)}{r}\,k^2l^2 = -\frac{D}{2}\lambda,$$

$$\text{Som}\, m\,\frac{\varphi'(r)}{r}\,h^4 = \text{Som}\, m\,\frac{\varphi'(r)}{r}\,k^4 = \text{Som}\, m\,\frac{\varphi'(r)}{r}\,l^4 = -\frac{D}{2}\mu,$$

les quantités λ et μ étant deux constantes spécifiques, on trouve

$$
(8)\quad \begin{cases} p_{zx} = -\lambda\left(\dfrac{du}{dr} + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = -\lambda\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right), \\ p_{zz} = -\lambda\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy}\right) - \mu\dfrac{dw}{dx}. \end{cases}
$$

Il existe entre les constantes λ et μ une relation qui résulte de ce que leurs valeurs sont indépendantes du choix des coordonnées. Soient en effet α, β, γ les angles que forment avec Oz trois axes rectangulaires Ox', Oy', Oz', h', k', l' les projections sur ces trois axes de la somme géométrique $\bar{h} + \bar{k} + \bar{l}$; nous avons

$$
l = h'\cos\alpha + k'\cos\beta + l'\cos\gamma,
$$

$$
(8')\quad \begin{cases} \mu = -\dfrac{2}{D}\operatorname{Som}\varphi'(r)\,l^4 \\ \quad = \mu(\cos^4\alpha + \cos^4\beta + \cos^4\gamma) \\ \qquad + 6\lambda(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma). \end{cases}
$$

Or de

$$
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1
$$

on tire

$$
\cos^4\alpha + \cos^4\beta + \cos^4\gamma = 1 - 2(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma).
$$

En substituant cette valeur dans la valeur (8′), on trouve

$$
\mu = 3\lambda \ (^1);
$$

nous avons donc finalement

$$
(9)\quad \begin{cases} p_{zx} = -\lambda\left(\dfrac{du}{dr} + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = -\lambda\left(\dfrac{dv}{dr} + \dfrac{dw}{dy}\right), \\ p_{zz} = -\lambda\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + 3\dfrac{dw}{dz}\right). \end{cases}
$$

(1) Cette relation, établie par Cauchy, puis par Poisson, a été contestée par

Par une permutation de lettres, on obtiendra les valeurs de p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}, et l'on reconnaîtra que les égalités $p_{xz} = p_{zx}$, ... sont vérifiées.

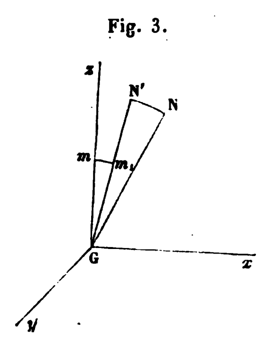
13. *Interprétation géométrique des formules qui représentent les pressions intérieures.* — Supposons que l'on transporte les *coordonnées parallèlement à elles-mêmes au point* G (*fig.* 3).

Si un point m primitivement situé sur Gz est venu en m_1, on a $h = 0$, $k = 0$, et la troisième des formules (G) donne

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\delta l}{l} = \frac{\mathrm{G}m_1 - \mathrm{G}m}{\mathrm{G}m}.$$

On voit ainsi pourquoi la dérivée $\frac{dw}{dz}$ exprime une dilatation : nous représenterons cette dérivée partielle par ∂_z.

Fig. 3.



Les coordonnées de m_1, parallèles à Ox, Oy, Oz, ont pour expres-

---

Lamé, qui, aux notations près, admet que λ et μ sont indépendants. Mais les expériences récentes de M. Kirchhoff sur l'acier fondu et de M. Cornu sur le cristal ont démontré très nettement que la restriction de Lamé devait être mise de côté quand il s'agit de corps isotropes.

Nous devons ajouter que des expériences faites indépendamment les unes des autres au Conservatoire des Arts et Métiers sur la traction et à la Société industrielle de Mulhouse sur la torsion confirment le résultat ci-dessus.

sions

$$\chi = \delta h = \frac{du}{dz} l,$$

$$\eta = \delta k = \frac{dv}{dz} l,$$

$$\zeta = l + \frac{dw}{dz} l.$$

Il résulte de là que, aux termes du second ordre près, on a, pour les équations de la normale matérielle primitive, après la déformation,

$$(10) \qquad \chi = \frac{du}{dz}\zeta, \quad \eta = \frac{dv}{dz}\zeta.$$

Les coordonnées d'un point primitivement situé dans le plan de l'élément $d\omega$ ont pour valeurs, après la déformation,

$$\chi' = h + \delta h = h + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k,$$

$$\eta' = k + \delta h = k + \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k,$$

$$\zeta' = \delta l = \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k,$$

d'où

$$\zeta' = \frac{dw}{dx}\chi' + \frac{dw}{dy}\eta',$$

pour l'équation du plan dans lequel se trouvaient primitivement les points matériels contenus dans $d\omega$.

Les équations de la normale GN à ce plan sont

$$(11) \qquad \chi' = -\frac{dw}{dx}\zeta', \quad \eta' = -\frac{dw}{dy}\zeta'.$$

Portons, à partir de G, sur les directions de Gm_1 et de GN des longueurs GN', GN égales à l'unité; l'élément NN' mesurera le *glissement*, c'est-à-dire l'angle compris sous la normale matérielle déformée et la normale à l'élément matériel déformé $d\omega$. Désignons par γ_z ce glisse-

ment et par γ_{zx} sa projection sur l'axe des x; nous avons

$$\gamma_{zx} = \chi - \chi',$$

d'où

$$\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \gamma_{zx}.$$

D'après les considérations ci-dessus, on peut donc écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} p_{zz} &= -\lambda(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z),\\ p_{yy} &= -\lambda(\delta_x + \delta_z + 3\delta_y),\\ p_{xx} &= -\lambda(\delta_y + \delta_z + 3\delta_x);\\ p_{yz} &= -\lambda\gamma_{yz},\\ p_{xz} &= -\lambda\gamma_{xz},\\ p_{xy} &= -\lambda\gamma_{xy},\\ \Delta &= \delta_x + \delta_y + \delta_z. \end{aligned}\right.$$

De ces relations on déduit

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -4\lambda(\delta_x + \delta_y + \delta_z) = -4\lambda\Delta,\\ & \delta_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{p_{xx}}{\lambda} + \Delta\right),\quad \delta_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{p_{yy}}{\lambda} + \Delta\right),\quad \delta_z = -\frac{1}{2}\left(\frac{p_{zz}}{\lambda} + \Delta\right),\\ & \gamma_{xy} = -\frac{p_{xy}}{\lambda},\quad \gamma_{xz} = -\frac{p_{xz}}{\lambda},\quad \gamma_{yz} = -\frac{p_{yz}}{\lambda}. \end{aligned}\right.$$

De la première de ces formules, il résulte que la somme de p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} est indépendante de l'orientation des axes coordonnés et qu'elle est, par suite, égale à la somme des pressions principales.

14. *Expression de la dilatation suivant une direction donnée.* — Soient

GX, GY, GZ les directions des trois pressions principales P, P′, P″; α, β, γ les angles que forme une droite Gz avec ces trois axes; Gx, Gy deux droites rectangulaires perpendiculaires à Gz.

D'après la première des équations (12) et l'équation (3) du n° 7, on a

$$p_{zz} = -\lambda(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z) = P\cos^2\alpha + P'\cos^2\beta + P''\cos^2\gamma.$$

D'ailleurs, la première des équations (13) donne

$$-\mu(\delta_x + \delta_y + \delta_z) = P + P' + P'';$$

d'où l'on déduit

$$(14) \qquad \delta_z = \frac{P\sin^2\alpha + P'\sin^2\beta + P''\sin^2\gamma}{2\lambda}.$$

Cette valeur peut se mettre sous la forme suivante :

$$\delta_z = \frac{P + P'}{2\lambda} - \frac{(P - P'')\cos^2\alpha + (P' - P'')\cos^2\beta}{2\lambda}.$$

Soient $P > 0$, $P > P' > P''$; on voit que δ_z est minimum pour $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, c'est-à-dire pour la direction de la plus petite pression principale. On reconnaîtra de la même manière que le maximum de δ_z correspond à la direction de la plus grande pression principale.

Si nous portons sur la direction de Gz une longueur $Gn = \frac{1}{\sqrt{\pm\delta_z}}$, en prenant le signe $+$ ou le signe $-$ selon que la dilatation est positive ou négative, et si x, y, z sont les coordonnées du point n, on a

$$\cos\alpha = \sqrt{\pm\delta_z}.x, \quad \cos\beta = \sqrt{\pm\delta_z}.y, \quad \cos\gamma = \sqrt{\pm\delta_z}.z,$$

et l'équation (14) devient

$$\delta_z[2\lambda \pm (Px^2 + P'y^2 + P''z^2)] = P + P' + P'';$$

d'où pour l'équation du lieu des points n

$$x^2(P' + P'') + y^2(P + P'') + z^2(P + P') = \pm 2\lambda.$$

Si, par exemple, on a $P > 0$, $P > P' > P''$, il faudra prendre le signe $+$ dans le second membre.

15. *Du travail développé par les forces élastiques.* — En négligeant les

puissances des déplacements, supérieures à la seconde, le travail total des actions mutuelles des molécules m' et m'' est

$$m'm''\int_0^{\delta r} f(r+\delta r)\,d\delta r = m'm''\left[f(r)\,\delta r + f'(r)\frac{\delta r^2}{2}\right].$$

Le travail de toutes les actions mutuelles relatives à m' sera, par suite,

$$m'\,\mathrm{Som}\,m''\left[f(r)\,\delta r + f'(r)\frac{\delta r^2}{2}\right],$$

le signe Som s'étendant à toutes les molécules de la sphère d'activité de m'. Si l'on fait la somme des quantités analogues pour toutes les molécules du corps, le travail de chaque couple d'actions mutuelles s'y trouvera répété deux fois, de sorte qu'il suffira, pour obtenir le résultat cherché, de faire la somme des expressions

$$\frac{m'}{2}\,\mathrm{Som}\,m''\left[f(r)\,\delta r + f'(r)\frac{\delta r^2}{2}\right]$$

pour tous les éléments matériels du corps.

Remplaçons maintenant δr par sa valeur (7) en y introduisant, pour simplifier, les notations du numéro précédent; puis supprimons, après la substitution, tous les termes renfermant h, k, l à des puissances impaires, qui sont nuls en raison de la symétrie, et en nous rappelant que

$$\mathrm{Som}\,m''\frac{f(r)}{r}h^2 = \mathrm{Som}\,m''\frac{f(r)}{r}k^2 = \mathrm{Som}\,m''\frac{f(r)}{r}l^2 = 0;$$

nous trouverons

$$\frac{m'}{4}\Big[(\delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2)\,\mathrm{Som}\,m''\frac{f'(r)}{r^2}h^4$$
$$+(2\delta_x\delta_y+2\delta_y\delta_z+2\delta_x\delta_z+\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{xz}^2)\,\mathrm{Som}\frac{f'(r)}{r^2}h^2k^2\Big].$$

Il est évident que l'on doit avoir entre $\mathrm{Som}\frac{f'(r)}{r^2}h^4$ et $\mathrm{Som}\frac{f'(r)}{r^2}h^2k^2$ la même relation qu'entre μ et λ, c'est-à-dire que la première de ces

sommes est triple de l'autre, de sorte qu'il vient

$$(a)\ \frac{m'}{4}(3\Delta^2 - 4\delta_x\delta_y - 4\delta_y\delta_z - 4\delta_x\delta_z + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)\,\text{Som}\, m'' \frac{f'(r)}{r^2} h^2 k^2.$$

Si, comme au n° **11**, on pose $\frac{f(r)}{r} = \varphi(r)$, il vient

$$\text{Som}\, m'' \frac{f'(r)}{r^2} h^2 k^2 = \text{Som}\, m'' \frac{\varphi'(r)}{r} h^2 k^2 + \text{Som}\, \frac{\varphi(r)}{r^2} h^2 k^2;$$

or, on a

$$\text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} h^2 k^2 = -\frac{2\lambda}{\text{D}},$$

$$\text{Som}\, m''\varphi(r) h^2 = \text{Som}\, m''\varphi(r) k^2 = \text{Som}\, m''\varphi(r)\, l^2 = 0,$$

puis

$$\text{Som}\, m'' \frac{\varphi(r)}{r^2} h^2 k^2 = \frac{1}{2}\text{Som}\, m'' \frac{\varphi(r)}{r^2}(h^2 + k^2) l^2 = \frac{1}{2}\text{Som}\, m'' \frac{\varphi(r)}{r^2}(r^2 - l^2) l^2$$

$$= \frac{1}{2}\text{Som}\,\varphi(r) l^2 - \frac{1}{2}\text{Som}\, m'' \frac{\varphi(r)}{r^2} l^4 = -\frac{1}{2}\text{Som}\, \frac{\varphi(r)}{r^2} l^4.$$

Or, comme le premier membre de cette triple égalité est égal à six fois la valeur absolue du dernier, il s'ensuit que

$$\text{Som}\, m''\varphi(r) \frac{h^2 k^2}{r^2} = 0.$$

L'expression (a) devient, par suite,

$$-\frac{m'}{2}\frac{\lambda}{\text{D}}(3\Delta^2 - 4\delta_x\delta_y - 4\delta_y\delta_z - 4\delta_x\delta_z + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2),$$

et, en y faisant $m' = \text{D}.dx\,dy\,dz$, il vient, pour le travail cherché,

$$(b)\ \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{T} = -\frac{\lambda}{2}\int\!\!\int\!\!\int (3\Delta^2 - 4\delta_x\delta_y - 4\delta_y\delta_z - 4\delta_x\delta_z \\ + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \right.$$

On peut mettre cette équation sous une autre forme en remplaçant d'abord Δ, δ_x, δ_y, δ_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} par leurs valeurs déduites des formules (12) et (13); puis, en remarquant que, d'après le n° **7**, on a, en

continuant à désigner par P, P′, P″ les pressions principales,

$$p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}=\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\mathrm{P}'',$$
$$p_{xx}p_{yy}+p_{yy}p_{zz}+p_{zz}p_{xx}-p_{xy}^2-p_{yz}^2-p_{xz}^2=\mathrm{PP}'+\mathrm{P}'\mathrm{P}''+\mathrm{PP}''.$$

On trouve ainsi

$$(15)\quad \mathfrak{T}=-\frac{1}{5\lambda}\int\int\int\left[(\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\mathrm{P}'')^2-\frac{5}{2}(\mathrm{PP}'+\mathrm{P}'\mathrm{P}''+\mathrm{PP}'')\right]dx\,dy\,dz.$$

16. *Équations de l'équilibre intérieur de l'élasticité en coordonnées rectilignes.* — En substituant dans les équations (1) du n° **3** les expressions (9) et celles qui en dérivent pour les deux autres axes, on a, en continuant à représenter par Δ la dilatation cubique,

$$(16)\quad \begin{cases} 2\dfrac{d\Delta}{dx}+\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2u}{dy^2}+\dfrac{d^2u}{dz^2}+\dfrac{\mathrm{DX}}{\lambda}=0,\\ 2\dfrac{d\Delta}{dy}+\dfrac{d^2v}{dx^2}+\dfrac{d^2v}{dy^2}+\dfrac{d^2v}{dz^2}+\dfrac{\mathrm{DY}}{\lambda}=0,\\ 2\dfrac{d\Delta}{dz}+\dfrac{d^2w}{dx^2}+\dfrac{d^2w}{dy^2}+\dfrac{d^2w}{dz^2}+\dfrac{\mathrm{DZ}}{\lambda}=0,\end{cases}$$

pour les équations aux différentielles partielles qui donneront u, v, w en fonction des coordonnées. Si X, Y, Z sont des fonctions de ces coordonnées, on les estimera, vu la petitesse des déplacements, comme si le corps n'avait pas éprouvé de déformation.

Soient $\mathrm{S}=0$ l'équation de la surface; p' la pression extérieure exercée au point (x, y, z) de cette surface et qui est une fonction des coordonnées de ce point; α, β, γ les angles formés par la normale en ce point avec $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$. En posant

$$\sigma=\sqrt{\frac{d\mathrm{S}^2}{dx^2}+\frac{d\mathrm{S}^2}{dy^2}+\frac{d\mathrm{S}^2}{dz^2}},$$

on a

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sigma}\frac{d\mathrm{S}}{dx},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sigma}\frac{d\mathrm{S}}{dy},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sigma}\frac{d\mathrm{S}}{dz},$$

et les équations (3) du n° **4** donnent pour les conditions relatives à la

surface

$$(17)\quad \begin{cases} \sigma p'_x = p_{xx}\dfrac{ds}{dx} + p_{yx}\dfrac{ds}{dy} + p_{zx}\dfrac{ds}{dz}, \\ \sigma p'_y = p_{xy}\dfrac{ds}{dx} + p_{yy}\dfrac{ds}{dy} + p_{zy}\dfrac{ds}{dz}, \\ \sigma p'_z = p_{xz}\dfrac{ds}{dx} + p_{yz}\dfrac{ds}{dy} + p_{zz}\dfrac{ds}{dz}, \end{cases}$$

équations dans lesquelles on devra remplacer $p_{xx}, p_{xy}, \ldots$ par leurs valeurs en fonction des déplacements.

Les équations (16) donnent celles du mouvement vibratoire en y remplaçant respectivement X, Y, Z par $X - \frac{d^2u}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2v}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2w}{dt^2}$, et l'on a

$$(18)\quad \begin{cases} 2\dfrac{d\Delta}{dx} + \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} + \dfrac{d^2u}{dz^2} + \dfrac{D}{\lambda}\left(X - \dfrac{d^2u}{dt^2}\right) = 0, \\ 2\dfrac{d\Delta}{dy} + \dfrac{d^2v}{dx^2} + \dfrac{d^2v}{dy^2} + \dfrac{d^2v}{dz^2} + \dfrac{D}{\lambda}\left(Y - \dfrac{d^2v}{dt^2}\right) = 0, \\ 2\dfrac{d\Delta}{dz} + \dfrac{d^2w}{dx^2} + \dfrac{d^2w}{dy^2} + \dfrac{d^2w}{dz^2} + \dfrac{D}{\lambda}\left(Z - \dfrac{d^2w}{dt^2}\right) = 0. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations après les avoir différentiées respectivement par rapport à x, y, z, on trouve

$$(19)\quad D\frac{d^2\Delta}{dt^2} = 3\lambda\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2} + \frac{d^2\Delta}{dy^2} + \frac{d^2\Delta}{dz^2}\right) + D\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right).$$

Si le corps n'est sollicité par aucune force extérieure, s'il est soumis à des forces constantes en grandeur et en direction, ou s'il est en général sollicité par des forces satisfaisant à la condition

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

comme cela a lieu pour les attractions ou répulsions émanant de centres fixes, l'équation (19) se réduit à la suivante :

$$(20)\quad \frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{3\lambda}{D}\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2} + \frac{d^2\Delta}{dy^2} + \frac{d^2\Delta}{dz^2}\right),$$

équation de la même forme que celle de l'Hydrodynamique.

Supposons que le corps soit sollicité par plusieurs groupes de forces (s), (s'), (s'') et que les pressions sur sa surface forment également différents groupes (σ), (σ'), (σ''), ..., en nombre égal aux précédents, en complétant, s'il y a lieu, par des zéros le système de groupes le moins nombreux. Les équations de l'équilibre intérieur ou du mouvement et celles qui sont relatives à la surface étant linéaires en u, v, w, il est clair que, si l'on satisfait à ces équations en combinant deux à deux les groupes (s) et (σ), la solution du problème s'obtiendra en faisant la somme des u, v, w obtenus de cette manière.

Il résulte de là que, si des forces produisent simultanément une traction ou une compression, une torsion et une flexion, il suffira d'étudier en particulier chacune des déformations, comme si elle se produisait indépendamment des autres.

Les équations des petits mouvements, déduites des équations (18), peuvent aussi se mettre sous la forme suivante, qui nous sera utile plus loin :

$$(18')\quad \left\{\begin{aligned} &3\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) = \frac{1}{k^2}\frac{d^2u}{dt^2},\\ &3\frac{d\Delta}{dy} + \frac{d}{dz}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) = \frac{1}{k^2}\frac{d^2v}{dt^2},\\ &3\frac{d\Delta}{dz} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) = \frac{1}{k^2}\frac{d^2w}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

en posant $\frac{D}{\lambda} = \frac{1}{k^2}$.

17. *Communication du mouvement vibratoire dans un milieu indéfini en tous sens.* — Considérons, dans le milieu censé en équilibre, une sphère d'un très petit rayon, mais renfermant néanmoins un assez grand nombre de molécules. Si l'on déplace ces molécules de la même manière autour du centre C de la sphère et qu'on les abandonne ensuite à elles-mêmes, elles entreront en vibrations; ces vibrations se communiqueront successivement à toute la masse et les molécules situées sur une sphère d'un rayon quelconque, ayant C pour centre, seront, au bout d'un certain temps, animées d'un même mouvement vibratoire. Ces surfaces sphériques successives sont des *ondes* et leur centre commun est le *centre d'ébranlement*.

Chaque déplacement vibratoire sur la surface de l'onde peut être considéré comme résultant d'un déplacement radial et d'un déplacement tangentiel.

Nous admettrons que la vitesse de propagation du mouvement d'une onde à une autre est constante, sans que pour cela elle ait la même valeur pour les vibrations radiales et les vibrations tangentielles.

A une grande distance du centre d'ébranlement, et sur une étendue restreinte, on peut substituer à chaque sphère, en suivant le même rayon, son plan tangent, ou ce que nous appellerons une *onde plane*. On est ainsi conduit à considérer une succession d'ondes planes parallèles.

Soient

xOy le plan de l'une de ces ondes;
T la durée d'une vibration complète normale qui est censée la même pour toutes les ondes;
V la vitesse de propagation du mouvement d'une onde à une autre, qui est également censée constante;
w_0 le déplacement des molécules de xOy;
t le temps mesuré à partir du moment où w_0 atteint son maximum ou son minimum;
A une constante.

Nous pouvons poser

$$w_0 = \mathrm{A} \cos \frac{2\pi t}{\mathrm{T}}.$$

En désignant par w le déplacement des molécules de l'onde plane définie par l'ordonnée z, correspondant au temps t, et remarquant que le mouvement de ces molécules est en retard de $\frac{z}{\mathrm{V}}$ sur le mouvement précédent, nous aurons

$$(21) \qquad w = \mathrm{A} \cos \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t - \frac{z}{\mathrm{V}}\right).$$

Il s'agit maintenant de savoir si cette valeur et les conditions $u = 0$, $v = 0$ satisfont aux équations (18'). Les deux premières qui se résument

en $\frac{d^2 w}{dx\,dz} = 0$, $\frac{d^2 w}{dy\,dz}$ sont satisfaites. La troisième donne

$$3\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{k^2}\frac{d^2 w}{dt^2};$$

d'où, en vertu de la valeur (21),

$$(22) \qquad V = k\sqrt{3}.$$

Considérons maintenant le mouvement vibratoire parallèle à Ox dans le plan de l'onde; nous aurons, comme dans le cas précédent, en accentuant les lettres,

$$(23) \qquad u = A'\cos\frac{2\pi}{T'}\left(t - \frac{x}{V'}\right).$$

Nous remarquerons que, dans ce mode de vibrations, la dilatation cubique Δ est nulle, et que, par suite, la densité du milieu n'éprouve aucune variation.

La seconde et la troisième des équations (18') sont satisfaites par la valeur (23) et par $v = 0$, $w = 0$. La première se réduit à

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{k^2}\frac{d^2 u}{dt^2},$$

d'où

$$(24) \qquad V' = k.$$

On voit ainsi que la constante k représente la vitesse de la propagation du mouvement vibratoire dans le plan de l'onde.

18. *Équations de l'équilibre d'élasticité en coordonnées cylindriques.* — Soient

OX, OY, OZ trois axes rectangulaires;
r la distance d'un point A du corps à l'état naturel à l'axe OZ;
θ l'angle formé par le plan ZOA avec le plan fixe ZOX;
z l'ordonnée de A parallèle à Oz;
Ar le prolongement de OA;
At la partie de la perpendiculaire à OA dirigée dans le sens de l'accroissement de θ;

U, V, W les composantes suivant Ar, At, Az du déplacement du point A, résultant de la déformation du corps sous l'action de forces extérieures.

Considérons le point A en projection sur le plan XOY, et soient

Ox et Oy deux axes auxiliaires, le premier étant dirigé suivant OA et le second étant parallèle à Ot;
U + dU, V + dV les déplacements d'un point A', infiniment voisin de A, suivant la direction OA'x' de OA' et sa perpendiculaire Oy' en O;
$r + dr =$ OA', $\theta + d\theta$ les coordonnées de A' dans le plan XOY.

Les déplacements U + dU, V + dV donnent les composantes

$$\begin{aligned} &U + dU - V\,d\theta \ldots Ox, \\ &V + dV + U\,d\theta \ldots Oy. \end{aligned}$$

Le déplacement relatif de A' par A a ainsi pour composantes

$$\begin{aligned} du &= dU - V\,d\theta \ldots Ox, \\ dv &= dV + U\,d\theta \ldots Oy. \end{aligned}$$

Si un point m situé en A se déplace de dr suivant OA, on a

$$\frac{dv}{dr} = 1, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0;$$

si le même point subit le déplacement $dy = r\,d\theta$ autour de Oz, on a

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = 0;$$

et, par suite,

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dr}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dV}{r\,d\theta} + \frac{U}{r}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dW}{dz}, \\ &\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} = \frac{dW}{r\,d\theta} + \frac{dV}{dz}, \\ &\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dr}, \\ &\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r}. \end{aligned} \right.$$

La dilatation cubique a pour valeur

$$(26)\qquad \Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{1}{r}\frac{drU}{dr} + \frac{dV}{r\,d\theta} + \frac{dW}{dz};$$

on a donc, pour les composantes des pressions,

$$(27)\qquad \begin{cases} p_{rr} = -\lambda\left(\Delta + 2\dfrac{dU}{dr}\right), \\ p_{tt} = -\lambda\left[\Delta + \dfrac{2}{r}\left(U + \dfrac{dV}{d\theta}\right)\right], \\ p_{zz} = -\lambda\left(\Delta + 2\dfrac{dW}{dz}\right), \\ p_{zt} = -\lambda\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dW}{d\theta} + \dfrac{dV}{dz}\right), \\ p_{zr} = -\lambda\left(\dfrac{dU}{dz} + \dfrac{dW}{dr}\right), \\ p_{rt} = -\lambda\left(\dfrac{dV}{dr} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{d\theta} - \dfrac{V}{r}\right). \end{cases}$$

Les équations (17) du n° 9 donnent, par suite,

$$(28)\qquad \begin{cases} 3\dfrac{d\Delta}{dr} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\zeta}{d\theta} - \dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{R}{k^2} = 0, \\ \dfrac{3}{r}\dfrac{d\Delta}{d\theta} + \dfrac{d\chi}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dr} + \dfrac{T}{k^2} = 0, \\ 3\dfrac{d\Delta}{dz} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dr\eta}{dr} - \dfrac{1}{r}\dfrac{d\chi}{d\theta} + \dfrac{Z}{k^2} = 0, \end{cases}$$

en posant, pour simplifier,

$$(29)\qquad \begin{cases} \chi = \dfrac{dV}{dz} - \dfrac{1}{r}\dfrac{dW}{d\theta}, \\ \eta = \dfrac{dW}{dr} - \dfrac{dU}{dz}, \\ \zeta = \dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{d\theta} - \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r} \end{cases}$$

et, comme ci-dessus,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{D}{\lambda}.$$

Dans le cas d'un mouvement vibratoire, il faudra remplacer dans les formules R, T, Z par

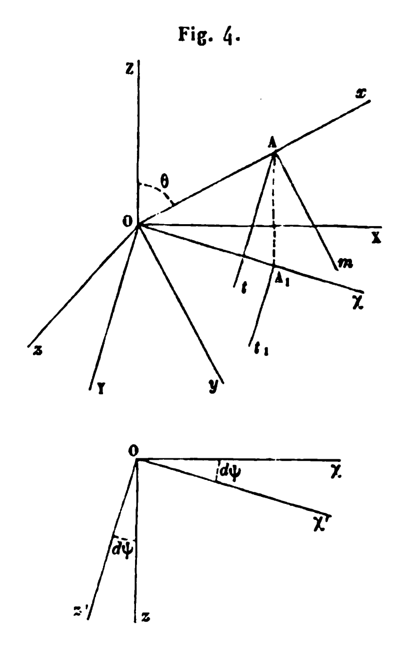
$$R - \frac{d^2U}{dt^2}, \quad T - \frac{d^2V}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2W}{dt^2}.$$

L'équivalent de l'équation (10) du n° **16**, dans le cas où elle est applicable, est ici, en se reportant à l'équation du mouvement de la chaleur en coordonnées cylindriques,

$$(30) \qquad r\frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{\lambda}{D}\left(r\frac{d^2\Delta}{dr^2} + \frac{d\Delta}{dr} + \frac{d\Delta}{dz} + \frac{1}{r}\frac{d\Delta}{d\psi}\right).$$

19. *Équations de l'équilibre d'élasticité en coordonnées sphériques.* — Tout en nous reportant au n° **10**, nous définirons de nouveau, pour

Fig. 4.



plus de clarté, les notations que nous avons adoptées, et que nous avons d'ailleurs à compléter.

Soient (*fig.* 4)

OZ ce que l'on peut appeler la ligne du pôle Z;

r et θ le rayon vecteur et la colatitude d'un point A du corps à l'état naturel;

ψ la longitude de ce point, mesurée à partir d'un plan azimutal ZOX et dont l'accroissement est censé avoir lieu de la gauche vers la droite;

$O\chi$ la projection de OA_1 sur le plan de l'équateur XOY;

Ax le prolongement de OA;

Am la portion de la méridienne dirigée vers l'équateur;

At la portion de la tangente au parallèle dirigée dans le sens de l'accroissement $d\psi$;

Ox, Oy, Oz trois axes auxiliaires rectangulaires dont l'origine est O, le premier étant dirigé suivant OA, les deux autres étant respectivement parallèles à Am et At;

U, V, W les composantes, suivant Ox, Oy, Oz ou Ar, Am, At, du déplacement qu'éprouve le point A lorsque le corps est soumis à l'action de forces extérieures.

Ce déplacement a ainsi pour composantes

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{lll} U\sin\theta + V\cos\theta & \text{suivant} & O\chi, \\ U\cos\theta - V\sin\theta & \text{»} & OZ, \\ W & \text{»} & Oz. \end{array}\right.$$

Considérons un point A′ infiniment voisin de A, pour lequel nous adopterons les notations précédentes, en nous bornant à en accentuer les lettres. Le déplacement de A′ a pour composantes

$$\begin{array}{lll} U\sin\theta + V\cos\theta + d(U\sin\theta + V\cos\theta) & \text{suivant} & O\chi', \\ U\cos\theta - V\sin\theta + d(U\cos\theta - V\sin\theta) & \text{»} & OZ, \\ W + dW & \text{»} & Oz', \end{array}$$

ou encore

$$(a')\quad \left\{\begin{array}{lll} U\sin\theta + V\cos\theta + d(U\sin\theta + V\cos\theta) - W\,d\psi & \text{suivant} & O\chi, \\ U\cos\theta - V\sin\theta + d(U\cos\theta - V\sin\theta) & \text{»} & OZ, \\ W + dW + (U\sin\theta + V\cos\theta)\,d\psi & \text{»} & Oz. \end{array}\right.$$

En vertu des formules (a) et (a'), on a, pour le déplacement relatif de A′ par rapport à A,

$$(b)\quad \begin{cases} d(\mathrm{U}\sin\theta + \mathrm{V}\cos\theta) - \mathrm{W}\,d\psi & \text{suivant } \mathrm{O}\chi, \\ d(\mathrm{U}\cos\theta - \mathrm{V}\sin\theta) & \quad » \quad \mathrm{OZ}, \\ d\mathrm{W} + (\mathrm{U}\sin\theta + \mathrm{V}\cos\theta)\,d\psi & \quad » \quad \mathrm{O}z. \end{cases}$$

Soient du, dv, dw les composantes du déplacement relatif ci-dessus de A′ par rapport à A, suivant $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$.

Au moyen des formules (b), il est facile de former les expressions suivantes :

$$(31)\quad \begin{cases} du = d\mathrm{U} - \mathrm{V}\,d\theta - \mathrm{W}\sin\theta\,d\psi, \\ dv = d\mathrm{V} + \mathrm{U}\,d\theta - \mathrm{W}\cos\theta\,d\psi, \\ dw = d\mathrm{W} + (\mathrm{U}\sin\theta + \mathrm{V}\cos\theta)\,d\psi. \end{cases}$$

Soient maintenant $\mathrm{F}(r', \theta', \psi')$ une fonction des coordonnées sphériques r', θ', ψ' correspondant aux coordonnées rectangulaires x, y, z, et proposons-nous de déterminer les valeurs que prennent les dérivées partielles de cette fonction par rapport à x, y, z, lorsqu'on y suppose $r' = r$, $\theta' = \theta$, $\psi' = \psi$. A cet effet, considérons un point m situé en A, et concevons qu'on lui fasse subir un déplacement infiniment petit, successivement dans les trois directions $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$:

1° *Suivant* $\mathrm{O}x$. Il est clair que l'on a

$$\frac{dr}{dx} = 1, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = 0;$$

2° *Parallèlement à* $\mathrm{O}y$. En prenant pour le déplacement dy le déplacement rotatoire $r\,d\theta$ autour de $\mathrm{O}z$, on a

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} = 0;$$

3° *Parallèlement à* $\mathrm{O}z$. Le déplacement dz peut être considéré comme égal au déplacement rotatoire $r\sin\theta\,d\psi$ autour de OZ, et il vient, par suite,

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{r\sin\theta}, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

Il résulte de là que l'on a, pour les valeurs cherchées,

$$(32)\qquad \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dr}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{1}{r}\frac{dF}{d\theta}, \quad \frac{dF}{dz} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dF}{d\psi}.$$

En partant de là, les formules (26) nous donneront, pour les dilatations et glissements qui ont lieu en A,

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{du}{dx} = \frac{dU}{dr},\\
&\frac{dv}{dy} = \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{U}{r},\\
&\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{r\sin\theta\, d\psi} + \frac{1}{r}(U + V\cot\theta);\\
&\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta} - \frac{V}{r},\\
&\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \frac{dU}{r\sin\theta\, d\psi} - \frac{W}{r} + \frac{dW}{dr},\\
&\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} = \frac{1}{r}\frac{dW}{d\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\psi} - \frac{W}{r}\cot\theta;
\end{aligned}\right.$$

on a, par suite, pour la dilatation cubique,

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} + \frac{dW}{r\sin\theta\, d\psi} + \frac{2U + V\cot\theta}{r}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV\sin\theta}{d\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dW}{d\psi}.
\end{aligned}\right.$$

De cette dernière formule, on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dr} &= \Delta - \frac{2U}{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV\sin\theta}{d\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dW}{d\psi},\\
\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} &= \Delta - \frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} - \frac{V\cot\theta}{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dW}{d\psi},\\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{dW}{d\psi} &= \Delta - \frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV\sin\theta}{d\theta};
\end{aligned}$$

on a ensuite, en se reportant aux formules (9) du n° **12**,

$$
(35)\quad
\left\{
\begin{aligned}
p_{rr} &= p_{xx} = \lambda\left(\Delta + 2\frac{dU}{dr}\right)\\
&= \lambda\left(3\Delta - \frac{4U}{r} - \frac{2}{r\sin\theta}\frac{dV\sin\theta}{d\theta} - \frac{2}{r\sin\theta}\frac{dW}{d\psi}\right),\\
p_{mm} &= p_{yy} = \lambda\left[\Delta + \frac{2}{r}\left(\frac{dV}{d\theta} + U\right)\right]\\
&= \lambda\left(3\Delta + \frac{2U}{r} - \frac{2}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} - \frac{2V\cot\theta}{r} - \frac{2}{r\sin\theta}\frac{dW}{d\psi}\right),\\
p_{tt} &= p_{zz} = \lambda\left[\Delta + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{dW}{d\psi} + U + V\cot\theta\right)\right]\\
&= \lambda\left(3\Delta + \frac{2U}{r} + \frac{2V}{r}\cot\theta - \frac{2}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} - \frac{2}{r\sin\theta}\frac{dV\sin\theta}{d\theta}\right),\\
p_{rm} &= p_{xy} = \lambda\left[\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{dU}{d\theta} - V\right)\right],\\
p_{rt} &= p_{xz} = \lambda\left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{dU}{d\psi} - W\right) + \frac{dW}{dr}\right],\\
p_{mt} &= p_{yz} = \frac{\lambda}{r}\left(\frac{dW}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{dV}{d\psi} - W\cot\theta\right).
\end{aligned}
\right.
$$

En substituant ces valeurs dans les équations (19) du n° **10**, on trouve, toutes réductions faites,

$$
(36)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&3r^2\sin\theta\frac{d\Delta}{dr} + \frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dU}{d\theta}\\
&\qquad + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2U}{d\psi^2} - \frac{d^2Vr\sin\theta}{dr\,d\theta} - \frac{d^2rW}{dr\,d\psi} + \frac{DRr^2\sin\theta}{\lambda} = 0,\\
&3\sin\theta\frac{d\Delta}{d\theta} - \sin\theta\frac{d^2U}{dr\,d\theta} + \sin\theta\frac{d^2Vr}{dr^2}\\
&\qquad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d^2V}{d\psi^2} - \frac{1}{r}\frac{d^2W}{d\theta\,d\psi} - \frac{1}{r}\frac{\cot\theta\,dW}{d\psi} + \frac{DMr\sin\theta}{\lambda} = 0,\\
&\frac{3}{\sin\theta}\frac{d\Delta}{d\psi} - \frac{2}{\sin\theta}\frac{d^2U}{dr\,d\psi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{d\psi}\left(V\cot\theta - \frac{dV}{d\theta}\right)\\
&\qquad + 2\frac{dW}{dr} + r\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{W}{r\sin^2\theta} + 2\frac{\cot\theta}{r}\frac{dW}{d\theta} + \frac{1}{r}\frac{d^2W}{d\theta^2} + \frac{DTr}{\lambda} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations peuvent encore se mettre sous cette forme

$$(37)\quad \begin{cases} 3r^2 \sin\theta \dfrac{d\Delta}{dr} + \dfrac{d}{d\theta} \sin\theta \left(\dfrac{dU}{d\theta} - \dfrac{dVr}{dr} \right) \\ \qquad + \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{dU}{d\psi} - \dfrac{drW}{dr} \right) + \dfrac{DR\, r^2 \sin\theta}{\theta} = 0, \\ 3 \sin\theta \dfrac{d\Delta}{d\theta} + \sin\theta \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{dVr}{dr} - \dfrac{dU}{d\theta} \right) \\ \qquad + \dfrac{1}{r\sin\theta} \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{dV}{d\psi} - \dfrac{dW \sin\theta}{d\theta} \right) + \dfrac{DM\, r \sin\theta}{\lambda} = 0, \\ \dfrac{3}{\sin\theta} \dfrac{d\Delta}{d\psi} - \dfrac{2}{\sin\theta} \dfrac{d^2 U}{dr\, d\psi} + \dfrac{1}{r\sin\theta} \dfrac{d}{d\psi}\left(V \cot\theta - \dfrac{dV}{d\theta} \right) \\ \qquad + \dfrac{d^2 Wr}{dr^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{dW}{d\theta} \dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{dW \sin\theta}{d\theta} + \dfrac{DT\, r}{\lambda} = 0. \end{cases}$$

L'équivalente de l'équation (20) du n° **16** dans le cas où elle est applicable est, en se reportant à la théorie de la chaleur,

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{3\lambda}{D}\left[\frac{1}{r} \frac{d^2 r\Delta}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\mu}(1 - \mu^2) \frac{d\Delta}{d\mu} + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} \frac{d^2\Delta}{d\psi^2} \right],$$

en se rappelant que μ représente $\cos\theta$.

III. — De la traction et de la compression d'un prisme ou cylindre.

20. Nous rappellerons que, si l'on représente par p' la pression sur un élément superficiel dont la normale fait les angles α, β, γ avec les axes coordonnés Ox, Oy, Oz, on a

$$(A)\quad \begin{cases} p'_x = p_{xx} \cos\alpha + p_{xy} \cos\beta + p_{xz} \cos\gamma, \\ p'_y = p_{yy} \cos\beta + p_{yx} \cos\alpha + p_{yz} \cos\gamma, \\ p'_z = p_{zz} \cos\gamma + p_{zx} \cos\alpha + p_{zy} \cos\beta. \end{cases}$$

Lorsque les molécules d'un corps isotrope ne sont sollicitées par aucune force extérieure, nous avons pour les équations de l'équilibre

intérieur,

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}=0,\\ &\frac{dp_{yx}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}=0,\\ &\frac{dp_{zx}}{dx}+\frac{dp_{zy}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}=0.\end{aligned}\right.$$

21. *Traction*. — Considérons un prisme ou cylindre, maintenu par une extrémité AB et dont l'autre extrémité CD est soumise à une traction Q uniformément répartie sur sa surface Ω. Soient Oz l'axe de la pièce ou le lieu des centres de gravité de ses sections droites; Ox, Oy deux axes rectangulaires compris dans le plan AB.

On a, pour la surface latérale,

$$p=0,\quad \gamma=90^\circ,\quad \beta=90^\circ-\alpha,$$

d'où

$$(A')\quad \left\{\begin{aligned} &p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\sin\alpha=0,\\ &p_{yx}\cos\alpha+p_{yy}\sin\alpha=0,\\ &p_{zx}\cos\alpha+p_{zy}\sin\alpha=0,\end{aligned}\right.$$

et pour la base CD,

$$(A'_1)\qquad p_{zx}=0,\quad p_{zy}=0,\quad p_{zz}=-\frac{Q}{\Omega}.$$

Nous allons chercher à satisfaire à toutes les conditions du problème en supposant, sauf justification ultérieure, que dans toute la masse on a

$$(C)\quad p_{xx}=0,\quad p_{yy}=0,\quad p_{xy}=0,\quad p_{zx}=0,\quad p_{zy}=0,\quad p_{zz}=-\frac{Q}{\Omega},$$

valeurs qui vérifient les équations (B), (A'), (A'_1) dont nous n'avons plus maintenant à nous occuper. En nous reportant aux nos **11** et **12**, nous voyons que les deux premières équations (C) correspondent aux suivantes :

$$3\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=3\delta_x+\delta_y+\delta_z=0,$$

$$3\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}=3\delta_y+\delta_x+\delta_z=0;$$

d'où

$$
(D) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \delta_x = -\dfrac{1}{4}\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{1}{4}\delta_z, \\ \dfrac{dv}{dy} = \delta_y = -\dfrac{1}{4}\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{1}{4}\delta_z. \end{cases}
$$

Il résulte déjà, de là, que le prisme éprouve une contraction latérale égale au $\frac{1}{4}$ de la dilatation longitudinale, résultat que Cagniard-Latour a confirmé par l'expérience.

La sixième des formules (C) donne

$$
-\lambda(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z) = -\frac{Q}{\Omega};
$$

d'où, en vertu des relations (D),

$$
(E) \qquad Q = \frac{5}{2}\lambda\Omega\delta_z = \frac{5}{2}\lambda\Omega\frac{dw}{dz};
$$

ainsi donc la dilatation longitudinale est constante ; si L est la longueur des prismes à l'état naturel, l l'allongement qu'il a éprouvé sous l'action de la traction Q, nous aurons

$$
(F) \qquad Q = \frac{5}{2}\lambda\Omega\frac{l}{L}.
$$

Donc l'effort de traction est proportionnel à la section du prisme et à son allongement proportionnel. Le coefficient spécifique de proportionnalité, que nous représenterons par E et que l'on déduit de l'expérience, a reçu le nom de *coefficient d'élasticité*. Nous avons ainsi

$$
(G) \qquad Q = E\Omega\frac{l}{L}
$$

avec la relation

$$
\frac{\lambda}{E} = \frac{2}{5}.
$$

Nous avons enfin à satisfaire aux troisième, quatrième et cinquième

des équations (C); on a

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=0,\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}=0,\quad \frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}=0.$$

Si nous supposons que w est indépendant de x et y, u de z et y, v de z et x, ces conditions seront satisfaites et, en nous reportant aux formules (D) et (E), nous aurons

$$w=\frac{2Q}{5\lambda\Omega}z,$$

$$u=-\frac{Q}{10\lambda\Omega}x,$$

$$v=-\frac{Q}{10\lambda\Omega}y.$$

Remarque. — Quoique ce qui précède suppose que la traction est uniformément répartie sur la base, il n'y a pas lieu de s'arrêter à cette restriction; car, d'après l'expérience, les effets de la traction deviennent indépendants du mode de distribution des forces extérieures à une très petite distance de leurs points d'application; de sorte que l'équation (G) s'applique au cas d'un prisme vertical dont on néglige le poids, dont une extrémité est rendue fixe, et qui est soumis à l'action d'une charge Q accrochée à son autre extrémité.

22. *Compression.* — Si l'effort extérieur change de sens ou devient une compression, tout ce que nous venons d'exposer reçoit encore son application; la seule différence est que l'on a ici une contraction longitudinale et une dilatation latérale égale au quart de cette contraction.

§ V. — De la torsion des prismes.

23. Considérons un corps prismatique ou cylindrique, censé vertical pour fixer les idées, maintenu par son extrémité supérieure et dans le plan de la base duquel on fait intervenir des forces continues assujetties à la seule condition de se réduire à un couple pour qu'elles ne produisent pas de flexion.

Soient O le point fixe de l'axe Oz de la pièce; Ox, Oy deux droites rectangulaires comprises dans le plan horizontal du point O.

Suivant M. de Saint-Venant, dont nous suivrons à très peu près l'analyse, la torsion est définie par un déplacement rotatoire de chaque section droite dans son plan (en négligeant d'abord la déformation de cette section), proportionnel à la distance z de la section au plan xOy.

Nous pouvons donc poser pour le point (x, y, z), et en désignant par θ une constante,

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz.$$

24. *Conditions relatives à la surface latérale.* — Nous avons $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, et, en exprimant que la pression sur la surface latérale est nulle,

$$p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\sin\alpha = 0,$$
$$p_{yx}\cos\alpha + p_{yy}\sin\alpha = 0,$$
$$p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\sin\alpha = 0.$$

Les deux premières de ces conditions seront satisfaites si nous admettons, sous la réserve de justifications ultérieures, que l'on a dans toute la masse

$$(2) \qquad p_{xx} = 0,$$
$$(3) \qquad p_{yy} = 0,$$
$$(4) \qquad p_{xy} = 0.$$

Soit

$$(5) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation du périmètre de la section droite; comme nous avons pour ce périmètre

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\alpha = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

la troisième des conditions ci-dessus se réduit à

$$(6)\qquad p_{zx}\frac{df}{dx}+p_{zy}\frac{df}{dy}=0.$$

25. *Condition relative à la base.* — Cette condition sera remplie si, pour toutes les sections, on a

$$(7)\qquad p_{zz}=0,$$

ce que nous supposerons encore sous toutes réserves.

26. *Équations de l'équilibre intérieur.* — Si nous admettons qu'en un point quelconque de la pièce on ait

$$(8)\qquad \frac{dp_{xz}}{dz}=0,$$

$$(9)\qquad \frac{dp_{yz}}{dz}=0,$$

les équations de l'équilibre intérieur, eu égard aux formules (2), (3) et (4), se réduisent à la suivante :

$$(10)\qquad \frac{dp_{zx}}{dx}+\frac{dp_{zy}}{dy}=0.$$

27. *Déductions de l'hypothèse de la nullité de la pression sur un élément quelconque perpendiculaire à chacun des trois axes coordonnés.* — Des équations (2), (3) et (7) on déduit

$$\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}+3\frac{du}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}+3\frac{dv}{dy}=0,$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}=0;$$

d'où

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{dv}{dy}=0,$$

$$(7')\qquad \frac{dw}{dz}=0.$$

Les deux premières de ces conditions étant satisfaites par les valeurs (1), il n'y a plus lieu de nous en occuper, et il en est de même des formules (2) et (3).

28. *Dernières conditions.* — L'équation (4), qui revient à la suivante,

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0,$$

étant également vérifiée par les valeurs (1), doit être mise aussi de côté.

Nous avons maintenant

(11) $$\begin{cases} p_{zx} = -\lambda\left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right) = -\lambda\left(\theta y + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = -\lambda\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right) = \lambda\left(\theta x - \dfrac{dw}{dy}\right). \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (10), on trouve

(12) $$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = 0.$$

29. *Résumé des formules.* — On voit, par ce qui précède, que le problème de la torsion d'un prisme se ramène à la considération des formules suivantes :

(7′) $$\frac{dw}{dz} = 0,$$

(12) $$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w}{dy^2} = 0,$$

(11) $$\begin{cases} p_{zx} = -\lambda\left(\theta y + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = \lambda\left(\theta x - \dfrac{dw}{dy}\right), \end{cases}$$

(5) $$f(x, y) = 0,$$

(6) $$\left(\theta y + \frac{dw}{dy}\right)\frac{df}{dx} + \left(-\theta x + \frac{dw}{dy}\right)\frac{df}{dy} = 0,$$

les deux dernières étant relatives au périmètre.

Soit $d\omega$ un élément de la base du prisme ayant pour coordonnées x, y; pour que les forces de torsion se réduisent à un couple, comme nous l'avons admis dès le début, il faut que l'on ait

$$\int p_{zx}\, d\omega = 0, \quad \int p_{zy}\, d\omega = 0$$

ou

(13) $$\int \frac{dw}{dx} d\omega = 0, \quad \int \frac{dw}{dy} d\omega = 0,$$

conditions auxquelles on devra encore satisfaire.

Supposons que le problème soit résolu ou que l'on ait obtenu w en fonction de x et y, et désignons par $\mathfrak{M}$ le moment de torsion $\int p_{zy} x\, d\omega - \int p_{zx} y\, d\omega$, qui est censé donné; nous aurons, eu égard aux formules (11), pour déterminer θ, la relation

(14) $$\mathfrak{M} = \lambda\left[\theta \int (x^2 + y^2)\, d\omega + \int \left(\frac{dw}{dx} y - \frac{dw}{dy} x\right) d\omega\right].$$

La remarque que nous avons faite à la fin du n° **21** reçoit encore ici son application, c'est-à-dire que les formules que nous venons d'établir sont encore exactes lors même que la torsion, au lieu d'être produite par des forces $p_{zx} d\omega$, $p_{zy} d\omega$, uniformément réparties sur la base, l'est par un couple situé dans le plan de cette base, car les effets de la torsion deviennent indépendants du mode de distribution des forces extérieures à une très petite distance de leurs points d'application et ne dépendent en définitive que du moment de torsion.

30. *Torsion du cylindre elliptique.* — Soient Ox, Oy les directions des axes principaux $2a$, $2b$ du profil elliptique;

(a) $$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de ce profil.

La formule (6) devient

(b) $$\left(\theta y + \frac{dw}{dx}\right) b^2 x + \left(-\theta x + \frac{dw}{dy}\right) a^2 y = 0,$$

et sera évidemment vérifiée d'une manière générale par une valeur de w proportionnelle à xy. On trouve ainsi

$$(c) \qquad w = \theta \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy,$$

et, comme cette valeur satisfait aux formules (7') et (12), on voit qu'elle donne la solution du problème.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, d'après la formule (c), les sections droites d'un cylindre circulaire restent planes après la déformation, mais que, dans le cas de l'ellipse, chacune de ces sections devient un segment d'un paraboloïde hyperbolique. On voit également que, dans deux angles droits adjacents déterminés par les axes, il se produit une saillie et un creux.

Les formules (11) deviennent

$$(d) \qquad \begin{cases} p_{zx} = -\ 2\lambda\theta \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} y, \\ p_{zy} = \quad 2\lambda\theta \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} x, \end{cases}$$

valeurs qui satisfont bien aux conditions (13), car il est visible que les $p_{zx} d\omega$, $p_{zy} d\omega$ forment deux à deux des couples.

Enfin on déduit facilement des formules (d), eu égard aux valeurs connues des moments principaux d'inertie de l'ellipse,

$$\mathfrak{M} = \pi\lambda\theta \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Les maxima des valeurs absolues de p_{zx}, p_{zy} correspondant respectivement à $y = b$ et à $x = a$, on voit que la plus grande valeur de la composante de glissement est développée aux sommets du petit axe de chaque section, qui sont ainsi les points dangereux, résultat complètement opposé à celui que l'on déduit de la résistance des matériaux.

32. *Torsion du prisme rectangle.* — Nous désignerons par $2a$ et $2b$ les côtés de la section du prisme parallèles à Ox et Oy.

En nous reportant à la condition (6), et remarquant que

$$f(x,y) = x \mp a$$

pour les faces perpendiculaires à Ox et

$$f(x,y) = y \mp b$$

pour les deux autres faces, et enfin ayant égard aux valeurs (11), nous avons

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{dw}{dx} + \theta y = 0, & \text{pour } x = \pm a, \text{ quel que soit } y \text{ entre } b \text{ et } -b, \\ \dfrac{dw}{dy} - \theta x = 0, & \text{pour } y = \pm b, \text{ quel que soit } x \text{ entre } a \text{ et } -a. \end{cases}$$

Si nous posons

$$(B)\qquad w = -\theta yx + w',$$

ces conditions deviennent

$$(A')\qquad \begin{cases} \dfrac{dw'}{dx} = 0, & \text{pour } x = \pm a, \\ \dfrac{dw'}{dy} = 2\theta x & \text{pour } y = \pm b, \end{cases}$$

et l'équation (12)

$$(12')\qquad \frac{d^2w'}{dx^2} + \frac{d^2w'}{dy^2} = 0.$$

En désignant par q un nombre quelconque et par A une constante arbitraire, cette dernière équation est satisfaite par

$$(c)\qquad w' = \theta A(e^{qy} - e^{-qx}) \sin qx.$$

Pour que cette valeur satisfasse à la première des conditions (A'), il faut que l'on ait $\cos qa = 0$, ce qui exige que q soit un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Si donc i désigne un nombre entier quelconque compris entre zéro et l'infini, l'équation (12') et la première des conditions (A') seront satisfaites par

$$w' = \theta \Sigma A_{2i+1} \left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} - e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} \sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}\right].$$

Portant cette valeur dans la seconde des conditions (6), on trouve

$$2x = \Sigma A_{2i+1}\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{b}{a}} + e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{b}{a}}\right]\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}.$$

Si nous multiplions cette équation par $\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}dx$, et si nous intégrons ensuite entre les limites $x = 0$ et $x = a$, tous les termes autres que celui qui renferme A_{2i+1} s'annuleront et nous aurons pour déterminer ce coefficient

$$\text{(D)} \qquad A_{2i+1} = \frac{4(-1)^i a^2}{\pi^3\left(i+\frac{1}{2}\right)^3\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{b}{a}} + e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{b}{a}}\right]}.$$

Nous avons donc

$$\text{(E)} \qquad w = \theta\left\{-yx + \Sigma A_{2i+1}\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} - e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}}\right]\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}\right\},$$

puis

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \dfrac{dw}{dx} = \theta\left\{-y + \sum\left(+i\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}A_{2i+1}\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} - e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}}\right]\cos\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}\right\}, \\ \dfrac{dw}{dy} = \theta\left\{-x + \sum\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}A_{2i+1}\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} + e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}}\right]\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}\right\}, \end{cases}$$

et enfin, d'après les formules (11),

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} \dfrac{p_{zx}}{\lambda} = \qquad -\sum\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}A_{2i+1}\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} - e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}}\right]\cos\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}, \\ \dfrac{p_{zy}}{\lambda} = 2x - \sum\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}A_{2i+1}\left[e^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}} + e^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{y}{a}}\right]\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}. \end{cases}$$

La pression p_{zx} change seulement de signe quand on y remplace y par $-y$; il en est de même de p_{zy} quand on y remplace x par $-x$. On voit ainsi que les pressions élémentaires $p_{zx}d\omega$, $p_{zy}d\omega$ forment respectivement des couples, condition qu'il était utile de vérifier.

Pour obtenir le moment de torsion, nous ferons $d\omega = dx\,dy$ dans la formule (14), après y avoir remplacé $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$ par leurs valeurs (G), puis

nous intégrerons entre les limites $x = \pm a$, $y = \pm b$; nous obtendrions ainsi

$$\frac{\mathfrak{M}}{\lambda\theta} = \frac{16a^3 b}{3} - \frac{4a^2}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^i A_{2i+1}}{(i+\frac{1}{2})^2}\left[e^{(i+\frac{1}{2})\pi\frac{b}{a}} - e^{-(i+\frac{1}{2})\pi\frac{y}{a}}\right]$$

ou, en remplaçant A_{2i+1} par sa valeur (D),

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{\mathfrak{M}}{\lambda\theta} = \frac{16a^3 b}{3} - \frac{4^5 a^4}{\pi^5}\sum \frac{1}{(2i+1)^5}\left[\frac{e^{(i+\frac{1}{2})\pi\frac{b}{a}} - e^{-(i+\frac{1}{2})\pi\frac{b}{a}}}{e^{(i+\frac{1}{2})\pi\frac{b}{a}} + e^{-(i+\frac{1}{2})\pi\frac{b}{a}}}\right].$$

Nous allons examiner maintenant deux cas particuliers.

1° *Cas d'un prisme d'une épaisseur très petite.* — Si a est suffisamment petit par rapport à b, les exponentielles négatives peuvent être négligées, et l'on a

$$\frac{\mathfrak{M}}{\lambda\theta} = a^3 b\left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{a}{b}\sum \frac{1}{(2i+1)^5}\right]$$

ou, à très peu près,

$$\frac{\mathfrak{M}}{\lambda\theta} = \frac{16}{3}a^3 b\left[1 - 0,63\cdot\frac{a}{b}\right].$$

2° *Cas d'un prisme à base carrée.* — Nous avons dans ce cas $b = a$, et en remplaçant dans la formule (E) A_{2i+1} par sa valeur (D), on trouve

$$\frac{w}{\theta} = -xy + 4a^2\sum \frac{(-1)^i}{(i+\frac{1}{2})^3}\,\frac{\left[e^{(i+\frac{1}{2})\pi\frac{y}{a}} - e^{-(i+\frac{1}{2})\pi\frac{y}{a}}\right]\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{a}}{e^{(i+\frac{1}{2})\pi} + e^{-(i+\frac{1}{2})\pi}}.$$

En formant un tableau des valeurs de $\frac{w}{\theta}$ pour des valeurs de $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$ croissant de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{10}$, M. de Saint-Venant a reconnu que w est nul pour $x = y$; et, comme on a aussi $w = 0$ pour $x = 0$ et $y = 0$, on reconnait que la surface de la section droite déformée présente une succession de creux et de saillies, qu'un creux est séparé des deux saillies adjacentes par un axe et une diagonale.

M. de Saint-Venant a obtenu pour le moment de torsion

$$\mathfrak{M} = 2,249233\lambda a^4\theta = 0,843462\lambda\theta\tfrac{8}{3}a^4.$$

Or, $\frac{8}{3}a^4$ est le moment d'inertie de la section par rapport à son centre; on voit ainsi que, pour faire cadrer la théorie mathématique de l'élasticité avec celle de la résistance des matériaux, il faut multiplier le moment de torsion par 0,84.

M. de Saint-Venant a trouvé aussi que le maximum de p_{xz} et p_{yz} ne correspond pas aux sommets du carré, comme on l'admet ordinairement, mais bien aux milieux de ses côtés.

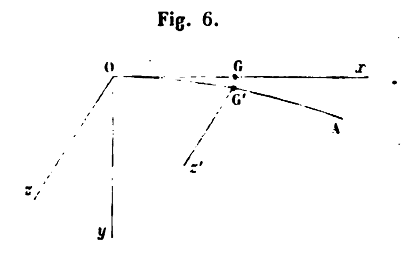
§ VI. — De la flexion des prismes.

32. L'axe d'un prisme ou cylindre sera, pour nous, le lieu géométrique des centres de gravité de ses sections droites.

Considérons (*fig.* 6) un prisme qui, à l'état naturel, est encastré horizontalement à l'une de ses extrémités O; désignons par

Ox son axe;
Oy la verticale du point O;
Oz la perpendiculaire au plan xOy qui est censé être un plan de symétrie;

Fig. 6.



a et Ω la longueur et la section de la pièce;
I le moment d'inertie de la section Ω par rapport à une parallèle Gz' à Oz menée par son centre de gravité G.

Sous l'action de forces verticales uniformément réparties sur sa base libre, le prisme fléchira, son axe restera dans le plan xOy et prendra la forme d'une courbe OA tangente en O à Ox. Soit P la résultante des forces extérieures.

33. *Conditions relatives à la surface latérale.* — Nous avons ici

$$\alpha = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ - \beta$$

et

(A). $$p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\sin\beta = 0,$$

(a) $$\begin{cases} p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\sin\beta = 0, \\ p_{zy}\cos\beta + p_{zz}\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Les conditions (a) seront satisfaites si dans la masse on a

(1) $$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0,$$

(1′) $$p_{yz} = 0,$$

comme nous le supposerons dans ce qui suit, sauf à établir ultérieurement les conditions qu'il faut remplir pour qu'il en soit ainsi.

Les équations de l'équilibre intérieur se réduisent alors aux suivantes :

(2) $$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0,$$

(2′) $$\frac{dp_{yx}}{dx} = 0,$$

(2″) $$\frac{dp_{zx}}{dx} = 0.$$

Les équations (1) se réduisent aux suivantes .

$$\delta_x + 3\,\delta_y + \delta_z = 0,$$
$$\delta_x + \delta_y + 3\,\delta_z = 0;$$

d'où

(3) $$\delta_y = \delta_z = -\frac{\delta_x}{4}$$

et

(4) $$p_{xx} = -\lambda(\delta_y + \delta_z + 3\,\delta_x) = -\frac{5}{2}\lambda\delta_x.$$

Nous n'avons plus ainsi à nous occuper des équations (1).

34. *Hypothèses.* — Pour chercher à faire cadrer la théorie mathématique de l'élasticité avec la théorie de la résistance des matériaux. Nous poserons

$$\delta_x = A_0 + A_1 y,$$

en désignant par A_0 une constante et par A_1 une fonction de x.

Considérons maintenant la portion du prisme comprise entre son extrémité A et un point G′ de OA ou G de Ox, et soit G′z' la parallèle en G′ à Oz.

Nous avons d'abord

$$\int p_{xx}\, d\omega = \frac{5}{2}\lambda \int \delta_x\, d\omega = 0,$$

d'où $A_0 = 0$; il suit de là que l'axe du prisme n'a pas éprouvé de dilatation ou que sa longueur n'a pas varié; c'est pourquoi on le désigne souvent sous le nom d'*axe neutre*.

En prenant les moments par rapport à G′z', on a

$$-\int p_{xx} y\, d\omega + P(a-x) = 0$$

ou

$$\frac{5}{2}\lambda A_1 I = -P(a-x)$$

et enfin

(b) $$A_1 = -\frac{2}{5}\frac{P(a-x)}{\lambda I},$$

(5) $$\delta_x = \frac{du}{dx} = -\frac{2}{5}\frac{P(a-x)}{\lambda I}y.$$

En désignant par $f(y, z)$ une fonction arbitraire de y et z, cette dernière équation donne

(6) $$u = -\frac{P}{\lambda I}\left[\frac{2}{5}\left(a - \frac{x}{2}\right)yx + f(y, z)\right].$$

On en déduit également

(5′) $$\frac{d^2 u}{dx\, dy} = -\frac{2}{5}\frac{P}{\lambda I}(a-x);$$

or l'équation (2′) revient à la suivante :

$$(\alpha)\qquad -\frac{d^2 u}{dx\,dy} = \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

Le second terme de cette équation représente la courbure $\frac{1}{\rho}$ d'une file quelconque de molécules primitivement parallèles à Ox, au point correspondant à l'abscisse a, et par conséquent la courbure de OA en G′. En se rappelant que $\lambda = \frac{2}{5}E$, l'équation (5′) revient à la formule connue

$$\frac{EI}{\rho} = P(a-x)$$

de la théorie de la résistance des matériaux.

La double équation (3), en ayant égard à la valeur (5), donne

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dy} &= \frac{P}{10\lambda I}(a-x)y,\\ \frac{dw}{dz} &= \frac{P}{10\lambda I}(a-x)y; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(d)\qquad v = \frac{P}{\lambda I}\left[\frac{(a-x)y^2}{20} + \varphi(x,z)\right],$$

$$(d')\qquad w = \frac{P}{\lambda I}\left[\frac{(a-x)yz}{10} + \psi(x,y)\right],$$

en désignant par $\varphi(x,z)$, $\psi(x,y)$ deux fonctions arbitraires. Mais, en raison de la symétrie, w doit seulement changer de signe avec z, de sorte que la formule (d') se réduit à la suivante :

$$(7)\qquad w = \frac{P}{10\lambda I}(a-x)yz.$$

La relation (1′) donne

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$$

et, en substituant dans cette équation les valeurs (d) et (7),

$$\frac{d\varphi(x, z)}{dz} = -\frac{\mathrm{P}}{10\lambda\mathrm{I}}(a - x)z;$$

d'où

$$\varphi(x, z) = \frac{\mathrm{P}}{\lambda\mathrm{I}}\left[-\frac{(a-x)z^2}{20} + \chi(x)\right],$$

en introduisant une nouvelle fonction arbitraire $\chi(x)$.

La formule (d) devient ainsi

$$(\beta) \qquad v = \frac{\mathrm{P}}{\lambda\mathrm{I}}\left[\frac{(a-x)(y^2-z^2)}{20} + \chi(x)\right].$$

La relation (α), qui est l'équivalente de l'équation $(2')$, donne, en y substituant les valeurs (6) et (β),

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \frac{2}{5}(a - x);$$

d'où, en représentant par h et k deux constantes,

$$\chi = \frac{1}{5}\left(a - \frac{x}{3}\right)x^2 + hx + k.$$

L'équation (β) devient ainsi

$$v = \frac{\mathrm{P}}{\lambda\mathrm{I}}\left[\frac{(a-x)(y^2-z^2)}{20} + \frac{1}{5}\left(a - \frac{x}{3}\right)x^2 + hx + k\right];$$

mais, pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on doit avoir $v = 0$, $\frac{dv}{dx} = 0$, d'après le mode d'encastrement, ce qui exige que h et k soient nuls.

Il nous reste donc

$$(8) \qquad v = \frac{\mathrm{P}}{20\lambda\mathrm{I}}\left[(a-x)(y^2-z^2) + 4\left(a - \frac{x}{3}\right)x^2\right].$$

L'équation $(2'')$ ou

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2u}{dx\,dz} = 0$$

est satisfaite par les valeurs (6) et (7).

Ainsi donc, jusqu'à présent, les équations (1), (1'), (2'), (2'') sont satisfaites, et, en récapitulant, nous avons

$$(6) \qquad u = -\frac{P}{\lambda I}\left[\frac{2}{5}\left(a - \frac{x}{2}\right)yx + f(y, z)\right],$$

$$(8) \qquad v = \frac{P}{\lambda I}\left[\frac{(a-x)(y^2 - z^2)}{20} + \frac{1}{5}\left(a - \frac{x}{3}\right)x^2\right],$$

$$(7) \qquad w = \frac{P}{10\lambda I}(a - x)yz,$$

$$(9) \qquad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad \frac{dp_{yx}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{zx}}{dx} = 0,$$

$$(10) \qquad p_{xx} = -\frac{5}{2}\mu\,\delta_x = \frac{P}{I}(a - x)y,$$

$$(11) \qquad p_{yx} = -\lambda\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) = \frac{P}{I}\left(\frac{df}{dy} + \frac{y^2 - z^2}{20}\right),$$

$$(12) \qquad p_{zx} = -\lambda\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) = \frac{P}{I}\left(\frac{df}{dz} + \frac{1}{10}yz\right).$$

Nous remarquerons que $f(y, z)$ doit être une fonction paire de z pour que p_{zx} change de signe avec z, et que la condition $\int p_{xx}\,dw = 0$ est satisfaite. En portant les valeurs (10), (11), (12) dans l'équation (2), on trouve

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{4}{5}y,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$(13) \qquad f(y, z) = \frac{2}{15}y^3 + F(y + iz) + F_1(y - iz),$$

i représentant le symbole $\sqrt{-1}$ et F, F_1 deux fonctions arbitraires.

Les équations (11) et (12) deviennent, par suite,

$$p_{yx} = -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) = \frac{P}{I}\left[F'(y + iz) + F'_1(y - iz) + \frac{9y^2 - z^2}{20}\right],$$

$$p_{zx} = -\mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) = \frac{P}{I}\left\{i\left[F'(y + iz) - F'_1(y - iz) + \frac{1}{10}yz\right]\right\}.$$

Or p_{zx} doit seulement changer de signe quand y remplace z par $-z$,

à -2 pour que y ne devienne pas infini pour $z=0$. Si $2m$ désigne ce nombre pair, nous aurons

$$(19)\qquad y=\pm\sqrt{Cz^{2m+2}+\frac{(m-2)}{5m}z^2},$$

en substituant à K sa valeur

$$K=\frac{2m-7}{20(3+2m)}.$$

En ayant égard à cette valeur, ainsi qu'à la relation (18), il est facile de voir que la condition (17) peut se mettre sous la forme

$$(20)\qquad 5I(4+3m)=I'(m-1),$$

et, comme m ne peut pas être inférieur à -1, il faut qu'il soit supérieur à l'unité et même à deux unités, pour que (19) ne représente pas deux droites. Comme y s'annule avec z, on voit que le point O sera un point multiple pair pour le profil, ce qui n'est pas physiquement réalisable. Il est clair que y s'annulera en outre pour

$$z=\pm\left(\frac{2-m}{5Cm}\right)^{\frac{1}{2m}}.$$

On reconnaitra sans peine que l'on a

$$I=\frac{4}{3}\int_0^{\left(\frac{2-m}{5Cm}\right)^{\frac{1}{2m}}} z^3\left(Cz^{2m}+\frac{m-2}{5m}\right)^{\frac{3}{2}}dz,$$

$$I'=4\int_0^{\left(\frac{2-m}{5Cm}\right)^{\frac{1}{2m}}} z^3\left(Cz^{2m}+\frac{m-2}{5m}\right)^{\frac{1}{2}}dz,$$

et la condition (20) se réduit à

$$\int_0^{\left(\frac{2-m}{5Cm}\right)^{\frac{1}{2m}}}\left(Cz^{2m}+\frac{m-2}{5m}\right)^{\frac{1}{2}}\left[5C(4+3m)z^{2m}+\frac{m-8}{m}\right]z^3\,dz=0,$$

équation qui, si l'on pouvait la résoudre, ferait connaître C lorsque l'on se done $m > 2$.

Supposons maintenant que χ soit une constante que nous représenterons par $\frac{9h}{20}$, l'équation (16) devient

$$dz^2(9y^2 - z^2 + 9h) - 2z^2\,dy^2 = 0.$$

Posant

$$y^2 + h = u, \quad z^2 = v,$$

il vient

$$dv(9u - v) - 2v\,du = 0,$$

équation homogène que l'on intégrera en posant $u = \sigma v$.

On trouve ainsi, en désignant par C une constante arbitraire,

$$u = Cv^{\frac{9}{2}} + \frac{v}{7}$$

ou

$$y^2 = Cz^9 + \frac{z^2}{7} - h.$$

Pour que le profil soit symétrique, il faut que C et h soient nuls; mais alors il se réduit à deux droites, ce qui est inadmissible.

VII. — Des vibrations des prismes et cylindres.

35. Considérons un prisme ou cylindre, censé vertical pour fixer les idées, et qui ne soit soumis à l'action d'aucune force extérieure; soient

Oz son axe de figure ou le lieu géométrique des centres de gravité de ses sections droites;
AB la section en O où un encastrement est censé avoir lieu;
CD la section terminale du prisme,
l sa longueur;
Ox, Oy deux axes rectangulaires situés dans la section d'encastrement AB.

36. *Vibrations longitudinales.* — Supposons que le prisme, à la suite d'une friction longitudinale répartie d'une manière quelconque sur sa paroi latérale, soit abandonné à lui-même; il exécutera une série d'oscillations longitudinales, et, en s'appuyant sur l'expérience, on est conduit à supposer $u = 0$, $v = 0$, mais sous toutes réserves.

Nous avons ainsi

$$(1)\quad \begin{cases} p_{xx} = -\lambda \dfrac{dw}{dz}, & p_{yy} = -\lambda \dfrac{dw}{dz}, & p_{zz} = -3\lambda \dfrac{dw}{dz}; \\ p_{xy} = -0, & p_{xz} = -\lambda \dfrac{dw}{dx}, & p_{yz} = -\lambda \dfrac{dw}{dy}. \end{cases}$$

En posant

$$(2)\quad \frac{\lambda}{D} = k^2,$$

il est facile de reconnaître que les équations de l'équilibre intérieur en ne tenant compte que de l'inertie se réduisent aux deux suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dw}{dx\,dz} = 0, \quad \dfrac{dw}{dy\,dz} = 0, \\ \dfrac{d^2w}{dt^2} = k^2\left(3\dfrac{d^2w}{dz^2} + \dfrac{d^2w}{dx^2} + \dfrac{d^2w}{dy^2}\right). \end{cases}$$

Il est visible, d'après les deux premières des équations (3), que w se composera de deux termes, l'un fonction de t et de z seulement, l'autre de t, x, y sans z. Nous laisserons de côté ce second terme, parce qu'il n'a rapport qu'à un cas particulier d'un problème plus général que nous chercherons à résoudre dans l'article suivant.

Ainsi donc nous supposerons que w est indépendant de x et de y.

La seconde des équations (3) devient alors

$$(4)\quad \frac{d^2w}{dt^2} = 3k^2\frac{d^2w}{dz^2}$$

et est satisfaite par

$$(5)\quad w = A\cos\frac{q}{k\sqrt{3}}(z+\gamma)\cos q(t+\tau),$$

en désignant par A, q, γ, τ quatre constantes.

Mais, pour la base, on doit avoir

$$p_{zz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{zy} = 0$$

ou, en vertu des formules (1),

$$\frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{pour } z = l,$$

ce qui exige que, en désignant par i un nombre entier,

$$q = \frac{i\pi k\sqrt{3}}{l+\gamma}.$$

Nous avons donc, au lieu de l'équation (5), la suivante :

$$w = \mathrm{A} \cos i\pi \frac{z+\gamma}{l+\gamma} \cos \frac{i\pi k\sqrt{3}}{l+\gamma}(t+\tau).$$

Si p' est la pression que l'on doit exercer sur la surface pour que les choses se passent comme nous l'avons supposé, il faut que l'on ait

$$p'_x = p_{xx} \cos\alpha, \quad p'_y = p_{yy} \sin\alpha$$

ou, d'après les deux premières formules (1),

$$p' = -\lambda \frac{dw}{dz},$$

pression qui est normale, mais qui ne peut être ni nulle ni constante, quelle que soit la forme du périmètre du prisme.

La solution que nous venons de donner, quoique due à nos plus grands géomètres de ce siècle, nous paraît donc insuffisante.

37. *Vibrations transversales.* — Conservons les notations qui précèdent, en admettant que le mode de vibrations soit le résultat d'un choc latéral, mais supposons maintenant $w = 0$, $p_{zz} = 0$, d'où

$$(1) \qquad \Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0.$$

Les équations (18') du n° **16** se réduisent, eu égard à la précédente, à

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{k^2}\dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{d^2u}{dz^2} + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right), \\ \dfrac{1}{k^2}\dfrac{d^2v}{dt^2} = \dfrac{d^2v}{dz^2} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right). \end{cases}$$

Si, en désignant par σ une fonction de x, y, z, nous posons

$$(3)\qquad u = \frac{d\sigma}{dy}, \quad v = -\frac{d\sigma}{dx},$$

l'équation (1) sera vérifiée et les équations (2) se réduiront à la suivante :

$$(4)\qquad \frac{1}{k^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{d^2\sigma}{dy^2} + \frac{d^2\sigma}{dz^2}.$$

Les composantes tangentielles

$$p_{xy} = -\lambda\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) = -\lambda\left(\frac{d^2\sigma}{dy^2} - \frac{d^2\sigma}{dx^2}\right),$$
$$p_{xz} = -\lambda\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) = -\lambda\frac{d^2\sigma}{dy\,dz},$$
$$p_{yz} = -\lambda\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) = \lambda\frac{d^2\sigma}{dy\,dz}$$

doivent être nulles sur la surface latérale; on satisfera à cette condition si l'on admet que dans l'intérieur de la masse : 1° la fonction σ est indépendante de z; 2° que

$$(5)\qquad \frac{d^2\sigma}{dy^2} - \frac{d^2\sigma}{dx^2} = 0.$$

L'équation (4) se réduit alors à la suivante :

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = \frac{d^2\sigma}{dy^2} = \frac{1}{2k^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

qui est satisfaite par

$$(6)\qquad \sigma = \mathrm{A}\cos\frac{qx}{k\sqrt{2}}(x+\varepsilon)\cos\frac{qy}{k\sqrt{2}}(y+\eta)\cos q(t+\tau),$$

en désignant par A, ε, η, τ quatre constantes.

Il vient

$$(7)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\mathrm{A}q}{k\sqrt{2}}\cos\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(x+\varepsilon)\sin\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(y+\eta)\cos q(t+\tau), \\ v = \dfrac{\mathrm{A}q}{k\sqrt{2}}\sin\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(x+\varepsilon)\cos\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(y+\eta)\cos q(t+\tau); \end{cases}$$

puis

$$(8)\qquad \begin{cases} p_{xx} = \lambda\dfrac{\mathrm{A}q^2}{k^2}\sin\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(x+\varepsilon)\sin\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(y+\eta)\cos q(t+\tau), \\ p_{yy} = -\lambda\dfrac{\mathrm{A}q^2}{k^2}\sin\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(x+\varepsilon)\sin\dfrac{q}{k\sqrt{2}}(y+\eta)\cos q(t+\tau), \\ p_{zz} = 0. \end{cases}$$

Les conditions relatives à la surface latérale se réduisent à

$$p'_x = p_{xx}\cos\alpha,$$
$$p'_y = p_{yy}\sin\alpha,$$

d'où

$$p' = \pm\frac{\lambda\mathrm{A}q^2\sqrt{2}}{k^2}\sin\frac{q}{k\sqrt{2}}(x+\varepsilon)\sin\frac{q\sqrt{2}(y+\eta)}{k^2}\cos q(t+\tau).$$

Cette pression sera normale, mais ne sera généralement pas nulle, comme on devrait l'exiger. Elle le sera cependant dans le cas d'un prisme à base carrée dont le côté serait $2a$, à la condition que l'on ait

$$\varepsilon = 0,\quad \eta = 0$$

et

$$q = \frac{i\pi k\sqrt{2}}{a},$$

en désignant par i un nombre entier. On peut déduire de là des consé-

quences plus ou moins intéressantes auxquelles nous ne croyons pas cependant devoir nous arrêter.

VIII. — Des membranes élastiques.

38. *Généralités.* — Considérons un solide homogène, limité, d'une part, par deux portions de surfaces parallèles, auxquelles nous donnerons le nom de *faces*, et de l'autre par une surface conoïde ou *contour* suivant laquelle le solide pourra être maintenu s'il y a lieu. En admettant que la distance ε des deux faces soit aussi petite que l'on voudra, le solide dont il s'agit sera pour nous une *membrane élastique*.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les deux faces ne sont soumises à aucune pression, mais que les molécules de la membrane sont soumises à l'action de forces extérieures proportionnelles à leurs masses, en y comprenant l'inertie quand il y aura lieu de la faire intervenir.

Comme les deux faces sont très voisines l'une de l'autre, nous pourrons admettre sans erreur sensible qu'elles restent parallèles après la déformation et que leur distance n'a pas varié.

Soient l, m, n les cosinus des angles α, β, γ, que forme, avec les trois axes, la normale au point (x, y, z) de l'une des faces déformée ou non selon la nature du problème que l'on a en vue de résoudre.

Les conditions relatives aux deux faces, sur lesquelles, comme nous l'avons dit, il ne s'exerce aucune pression, seront satisfaites si nous admettons, sauf justification ultérieure, que nous ayons dans toute la masse

$$(1)\qquad \begin{cases} lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz} = 0, \\ lp_{yx} + mp_{yy} + np_{yz} = 0, \\ lp_{zx} + mp_{zy} + np_{zz} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant un élément de volume de la membrane déterminé par un prisme parallèle à Oz ayant pour base $dx\,dy$. Si l'on remarque que l'épaisseur de la membrane estimée parallèlement à Oz est $\frac{\varepsilon}{n}$, et si l'on applique à l'élément considéré, pour exprimer les conditions d'équilibre, la même méthode que pour le parallélépipède élé-

mentaire, on trouve, sans difficulté, les équations suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\frac{p_{xx}}{n}}{dx}+\dfrac{d\frac{p_{yx}}{n}}{dy}=\mathrm{D}\dfrac{\mathrm{X}}{n},\\[2ex] \dfrac{d\frac{p_{yy}}{n}}{dy}+\dfrac{d\frac{p_{xy}}{n}}{dx}=\mathrm{D}\dfrac{\mathrm{Y}}{n},\\[2ex] \dfrac{d\frac{p_{xz}}{n}}{dz}+\dfrac{d\frac{p_{yz}}{n}}{dy}=\mathrm{D}\dfrac{\mathrm{Z}}{n}. \end{cases}$$

Si l'on porte dans la dernière de ces équations les valeurs de p_{xz}, p_{yz} déduites des deux premières des équations (1), on obtient le résultat

$$\begin{aligned} &-l\frac{d\frac{p_{xx}}{n}}{dx}-m\frac{d\frac{p_{xy}}{n}}{dx}-\frac{p_{xx}}{n}\frac{dl}{dx}-p_{xy}\frac{dm}{dx}\\ &-m\frac{d\frac{p_{yy}}{n}}{dy}-l\frac{d\frac{p_{yx}}{m}}{dy}-p_{yy}\frac{dm}{dy}-p_{yx}\frac{dl}{dy}=\mathrm{D}\frac{\mathrm{Z}}{n}; \end{aligned}$$

mais, en ayant égard aux deux premières des équations (2), on reconnaît sans peine que le résultat ci-dessus se réduit au suivant :

$$(3)\qquad p_{xx}\frac{dl}{dx}+p_{yy}\frac{dm}{dy}+p_{xy}\left(\frac{dm}{dx}+\frac{dl}{dy}\right)+\mathrm{D}(\mathrm{Z}+l\mathrm{X}+m\mathrm{Y})=0,$$

équation que l'on peut substituer à l'une des deux premières équations (1) ou à la dernière des équations (2).

Si entre les équations (1) on élimine p_{xz}, p_{yz}, on arrive à la suivante :

$$(4)\qquad p_{zz}=\frac{1}{n^2}(l^2p_{xx}+2mlp_{xy}+m^2p_{yy}).$$

Dans la plupart des cas, on pourra substituer à l, m, n leurs valeurs

déduites de l'équation

(5) $$f(x, y, z) = 0$$

de l'une des faces, lorsque la membrane est à l'état naturel, savoir :

(6) $$l = \frac{\frac{df}{dx}}{\sigma}, \quad m = \frac{\frac{df}{dy}}{\sigma}, \quad n = \frac{\frac{df}{dz}}{\sigma},$$

en posant

(6′) $$\sigma = \sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}.$$

Dans tout ce qui suit, nous ne nous occuperons que des membranes primitivement planes.

39. *De l'équilibre d'élasticité d'une membrane plane.* — Si nous prenons l'une des faces, à l'état naturel, pour plan des xy, et si nous négligeons les effets de la déformation, nous aurons $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$, et les équations (1), (3) et (4) nous donneront

(7) $$p_{xz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zz} = 0\ (^1), \quad Z = 0.$$

On voit ainsi que la membrane ne peut se trouver en équilibre que si les forces qui sollicitent ses molécules sont parallèles aux deux faces.

La troisième des équations (2) étant satisfaite, il nous suffit de considérer les deux autres qui deviennent

(8) $$\begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{yx}}{dy} = DX, \\ \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{xy}}{dx} = DY. \end{cases}$$

Les trois premières des équations (7) nous donnent, en faisant inter-

(1) La condition $p_{zz} = 0$ exige que l'ellipsoïde des pressions se réduise à une ellipse; de sorte que, dans la membrane, une pression principale est nulle.

venir les déplacements élastiques,

$$(9)\qquad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=0,\quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=0,\quad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}=0.$$

En ayant égard à la troisième de ces relations, on voit que

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= -\lambda\left(3\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=-\frac{2\lambda}{3}\left(4\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right),\\ p_{xy} &= -\lambda\left(3\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}\right)=-\frac{2\lambda}{3}\left(4\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dx}\right),\\ p_{xy} &= -\lambda\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),\end{aligned}\right.$$

et les équations (8) deviennent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} 8\frac{d^2u}{dx^2}+5\frac{d^2v}{dx\,dy}+3\frac{d^2u}{dy^2}&=3\frac{D}{\lambda}X,\\ 8\frac{d^2v}{dy^2}+5\frac{d^2u}{dx\,dy}+3\frac{d^2v}{dx^2}&=3\frac{D}{\lambda}Y.\end{aligned}\right.$$

40. *De la répartition des efforts élastiques dans une membrane plane également tendue dans tous les sens.* — Supposons que la membrane ne soit sollicitée par aucune force extérieure, ou que $X=0$, $Y=0$, mais que, par suite d'une disposition spéciale, on lui fasse subir une tension normale uniforme τ sur tout son contour. Soit φ l'angle que forme la normale au point (x, y) du contour avec Ox; en remarquant que τ doit être considéré comme une pression négative, nous avons, en invoquant le théorème des composantes normales réciproques,

$$\begin{aligned} -\tau\cos\varphi &= p_{xx}\cos\varphi + p_{xy}\sin\varphi,\\ -\tau\sin\varphi &= p_{yy}\cos\varphi + p_{xy}\cos\varphi;\end{aligned}$$

d'où

$$(12)\qquad -\tau = p_{xx}\cos^2\varphi + 2p_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + p_{yy}\sin^2\varphi.$$

Ainsi, nous aurons à satisfaire aux équations

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{yx}}{dy} = 0, \\ \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{xy}}{dx} = 0, \\ p_{xx} = -\dfrac{2\lambda}{3}\left(4\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy}\right), \\ p_{yy} = -\dfrac{2\lambda}{3}\left(4\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{du}{dx}\right), \\ \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx} = 0, \\ \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy} = 0, \\ \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + 3\dfrac{dw}{dz} = 0 \end{cases}$$

et à la condition (12).

Si la membrane est circulaire et si l'on place l'origine des coordonnées à son centre, on a évidemment $p_{xy} = 0$; la condition (12) est satisfaite par les valeurs

$$p_{xx} = p_{yy} = -\tau,$$

qui satisfont également aux deux premières des équations (A).

Les deux suivantes le sont aussi par

$$u = \frac{3}{10}\frac{\tau}{\lambda}x, \quad v = \frac{3}{10}\frac{\tau}{\lambda}y,$$

et le déplacement en chaque point est aussi dirigé suivant le rayon, comme cela était visible *a priori*.

Les cinquième et sixième des équations (A) exigent que w soit indépendant de x et y; enfin la dernière donne

$$(13)\quad w = -\frac{1}{5}\frac{\tau}{\lambda}z.$$

Ce dernier résultat paraît paradoxal au premier abord, car il semble

que w doit être nul sur le contour. Mais il faut remarquer que le mode d'encastrement latéral n'est pas absolument fixe sur toute l'épaisseur de la membrane. Considérons, par exemple, le cas simple du tambour de basque; w doit être considéré comme nul sur la face adjacente à la monture; mais on a le sentiment que la tension doit avoir pour effet de faire éprouver une diminution à l'épaisseur de la peau. D'après la formule (13), la réduction relative de cette épaisseur est

$$\frac{1}{5}\frac{\tau}{\lambda} = \frac{\tau}{2E},$$

en nous rappelant que E représente le coefficient d'élasticité.

41. *Vibrations transversales d'une membrane plane.* — Il y a lieu dans cette question de tenir compte de la déformation de la membrane, censée réduite à l'état d'une surface élastique; ce qui veut dire que l, m doivent être considérés comme des quantités du premier ordre et que l'on a $n = 1$, en négligeant les termes du second ordre.

Nous supposerons que $u = 0$, $v = 0$ et que w est indépendant de z; de plus, que $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\frac{d^2 w}{dt^2}$.

On voit sans difficulté que $p_{xx} = 0$, $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{xy} = 0$, et ensuite que

$$p_{xz} = -\lambda\frac{dw}{dx}, \quad p_{yz} = -\lambda\frac{dw}{dy}.$$

Les deux premières des équations (2) sont satisfaites, et les équations (3) le sont aussi. Il ne nous reste donc que la troisième des équations (2) qui devient

$$(13) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{D}{\lambda}\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{1}{k^2}\frac{d^2 w}{dt^2};$$

cette équation est satisfaite par

$$(14) \qquad w = A_{m,n} \sin m(x+\chi) \sin n(y+\eta) \sin k\sqrt{m^2+n^2}(t+\tau),$$

en désignant par m, n, $A_{m,n}$, χ, η des constantes arbitraires. On obtiendra une solution plus générale de l'équation (13) en prenant pour

w la somme des valeurs que l'on obtient, en donnant dans l'expression (14) toutes les valeurs possibles aux constantes arbitraires, soit

$$(15)\qquad w = \Sigma A_{m,n} \sin m(x+\chi) \sin n(y+\eta)\ \sin k\sqrt{m^2+n^2}(t+\tau).$$

Si la membrane est encastrée suivant son contour dont l'équation en x, y est censée donnée, on devra avoir

$$(16)\qquad w = 0$$

pour ce contour. Soient $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ les valeurs initiales de w et $\frac{dw}{dt}$, qui sont aussi des données de la question ; nous devons avoir

$$(17)\quad \begin{cases} f(x, y) = \Sigma A_{m,n} \sin m(x+\chi) \sin n(y+\eta) \sin k\sqrt{m^2+n^2}\tau, \\ f_1(x, y) = \Sigma k\sqrt{m^2+n^2} \sin m(x+\chi) \sin n(y+\eta) \cos k\sqrt{m^2+n^2}\tau. \end{cases}$$

Les valeurs des constantes se détermineront au moyen des conditions (16) et (17).

42. *Cas d'une membrane rectangulaire.* — Nous prendrons le centre de la membrane pour origine des coordonnées et les axes Ox, Oy respectivement parallèles aux deux couples de côtés $2a$ et $2b$.

L'équation (13) et la condition (16) relative au contour seront satisfaites par

$$(18)\quad \begin{cases} w = \sum \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{i'\pi y}{b} \\ \quad\times\left(M_{i,i'} \cos\pi k\sqrt{\frac{i^2}{a^2}+\frac{i'^2}{b^2}}t + N_{i,i'} \sin\pi k\sqrt{\frac{i^2}{a^2}+\frac{i'^2}{b^2}}t\right), \end{cases}$$

en désignant par i, i' deux nombres entiers quelconques, par $M_{i,i'}$, $N_{i,i'}$ deux constantes arbitraires.

Les conditions relatives à l'état initial seront exprimées par

$$(19)\quad \begin{cases} f(x, y) = \sum M_{i,i'} \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{i'\pi y}{b}, \\ f_1(x, y) = \pi_k \sum M_{i,i'} \sqrt{\frac{i^2}{a^2}+\frac{i'^2}{b^2}} \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{i'\pi y}{b}. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces deux équations par $\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\,dx\,dy$, et que l'on effectue ensuite l'intégration entre les limites $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, on reconnaît, sans difficulté, que l'on a

$$(20)\quad\begin{cases} M_{i,i'} = \dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a dx\int_0^b f(x,y)\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\,dx\,dy, \\ N_{i,i'} = \dfrac{4}{\pi abk\sqrt{\dfrac{i^2}{a^2}+\dfrac{i'^2}{b^2}}}\displaystyle\int_0^a dx\int_0^b f_1(x,y)\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\,dx\,dy, \end{cases}$$

et le problème se trouve ainsi complètement résolu.

Cas de la membrane carrée, en supposant nulle la vitesse initiale. — Nous avons ici

$$a=b,\quad f_1(x,y)=0,\quad N_{i,i'}=0$$

et, par suite,

$$(21)\qquad w=\sum M_{i,i'}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\cos\frac{\pi k}{a}\sqrt{i^2+i'^2}\,t.$$

Supposons que, en désignant par ν un nombre entier quelconque, on puisse trouver des valeurs entières de i, i' satisfaisant à l'équation indéterminée

$$(22)\qquad i^2+i'^2=\frac{\nu^2a^2}{k^2}.$$

L'ensemble des termes de la série (21) se rapportant à la valeur ν correspondra à un même son, et l'équation générale des lignes nodales, donnée par $w=0$, quel que soit t, sera

$$(23)\qquad \sum M_{i,i'}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}=0,$$

le signe Σ se rapportant ici uniquement à la somme des termes pour lesquels l'équation (22) est satisfaite.

IX. — Des cylindres circulaires.

43. *Équilibre d'élasticité d'une enveloppe cylindrique soumise à l'action d'une pression normale constante sur sa surface intérieure et d'une pression semblable sur sa surface extérieure.* — Soient r_0, r_1 le rayon intérieur et le rayon extérieur de l'enveloppe; P_0, P_1 la pression intérieure et la pression extérieure, la première étant censée supérieure à la seconde, et de telle manière que

$$P_0 r_0^2 > P r_1^2.$$

Nous supposerons que l'enveloppe est terminée par des fonds plats ou courbes, ajustés de manière que toute section annulaire éprouve une traction uniforme F parallèle à l'axe, ce qui établit la relation

$$(\pi r_1^2 - \pi r_0^2) F = P_0 \pi r_0^2 - P_1 \pi r_1^2;$$

d'où

$$F = \frac{P_1 r_1^2 - P_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}. \tag{1}$$

Dans les circonstances actuelles, on a évidemment $V = 0$, et U et W sont indépendants de θ. Nous admettrons, sauf justification ultérieure, que U ne dépend que de r et W et z. Comme on a ici $R = 0$, $T = 0$, $Z = 0$, les formules (26) et (30) du n° **18** se réduisent aux suivantes :

$$\Delta = \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} + \frac{dW}{dz}, \tag{2}$$

$$(3)\quad \begin{cases} p_{rr} = -\lambda\left(3\dfrac{dU}{dr} + \dfrac{U}{r} + \dfrac{dW}{dz}\right), \\ p_{tt} = -\lambda\left(3\dfrac{U}{r} + \dfrac{dU}{dr} + \dfrac{dW}{dz}\right), \\ p_{zz} = -\lambda\left(3\dfrac{dW}{dz} + \dfrac{dU}{dr} + \dfrac{U}{r}\right); \\ p_{zt} = 0, \quad p_{zr} = 0, \quad p_{rt} = 0. \end{cases}$$

La seconde des équations (17) du n° **9** est satisfaite d'elle-même.

La troisième se réduit à

$$\frac{dp_{zz}}{dz} = 0$$

ou

$$\frac{d^2W}{dz^2} = 0$$

et enfin à

(4) $$W = Cz,$$

en désignant par C une constante et plaçant l'origine au milieu de l'axe. La première des équations (17) du numéro précité devient

$$\frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{p_{rr} - p_{rt}}{r} = 0$$

ou

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0,$$

équation homogène dont l'intégrale est

(5) $$U = Ar + \frac{B}{r},$$

en désignant par A et B deux nouvelles constantes.

En portant les valeurs (4) et (5) dans les équations (2) et (3), on trouve

(2′) $$\Delta = 2A + C,$$

(3′) $$\begin{cases} p_{rr} = -\lambda\left(4A - \frac{2B}{r^2} + C\right), \\ p_{tt} = -\lambda\left(4A + \frac{2B}{r^2} + C\right), \\ p_{zz} = -\lambda(3C + 2A). \\ p_{zt} = 0, \quad p_{zr} = 0, \quad p_{tr} = 0. \end{cases}$$

Mais on doit avoir $p_{rr} = P_0$ pour $r = r_0$, $p_{rr}' = p_1$ pour $r = r_1$, et

$p_{zz} = -$ F; on a ainsi les relations

$$4A - \frac{2B}{r_0^2} + C = -\frac{P_0}{\lambda},$$

$$4A - \frac{2B}{r_1^2} + C = -\frac{P_1}{\lambda},$$

$$3C + 2A = \frac{P_1 r_1^2 - P_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2};$$

d'où l'on déduit

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} B &= \frac{r_1^2 r_0^2 (P_0 - P_1)}{2\lambda (r_1^2 - r_0^2)},\\ A = C &= \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{5\lambda (r_1^2 - r_0^2)},\\ \Delta &= \frac{3}{5\lambda}\,\frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2},\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que l'enveloppe est uniformément dilatée dans toute son étendue.

La seconde des formules (3') donne enfin

$$(6)\qquad -p_{tt} = \frac{P_0 r_0^2 - P_1^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{R^2 r_0^2 (P_0 - P_1)}{r^2 (r_1^2 - r_0^2)},$$

d'où résulte que la section méridienne éprouve une traction variable dont le maximum a lieu vers la paroi intérieure ou pour $r = R_0$.

Si nous égalons ce maximum à l'effort élastique Γ que l'on ne doit pas faire dépasser à la nature, soit pour ne pas atteindre l'élasticité, soit pour obtenir une sécurité convenable, on trouve la relation

$$(7)\qquad \frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\Gamma + P_0}{\Gamma + 2P - P_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{P_0 - P_1}{\Gamma + P_0}}};$$

comme, dans les applications, le rapport $\frac{P_0 - P_1}{\Gamma + P_0}$ est généralement très petit, on peut prendre simplement

$$\frac{r_1}{r_0} = 1 + \frac{P_0 - P_1}{\Gamma + P_1};$$

d'où, en désignant par e l'épaisseur $r_1 - r_0$,

$$e = \frac{r_0(P_0 - P)}{\Gamma},$$

ce qui est précisément la formule à laquelle conduit la théorie de la résistance des matériaux.

44. *Virole serrée à chaud sur une autre virole ou sur un cylindre.* — 1° Considérons d'abord le cas de deux viroles; soient, à l'état naturel, r_0, r'_0 les rayons intérieurs et r_1, r'_1 les rayons extérieurs de la grande et de la petite virole; N l'action mutuelle par unité de surface des deux viroles après le serrage.

A cela près, conservons les notations qui précèdent.

Les formules (4), (5) et (3') sont applicables à l'une et à l'autre virole, en y supposant $p_{zz} = 0$.

En ce qui concerne la virole extérieure, on a $p_{rr} = 0$ pour $r = r_1$, $p_{rr} = \mathrm{N}$ pour $r = r_0$; d'où

$$\mathrm{A} = -\frac{3}{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\lambda r_1^2\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)},$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{N}}{\lambda\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)},$$

$$\mathrm{C} = \frac{1}{5}\,\frac{\mathrm{N}}{\lambda r_1^2\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)},$$

et pour la valeur U_0 de U à la surface intérieure,

$$(7) \qquad \mathrm{U}_0 = \frac{\mathrm{N}}{2\lambda r_0\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)}\left(1 - \frac{3}{5}\,\frac{r_0^2}{r_1^2}\right).$$

Pour obtenir la valeur U'_1 de U à la surface extérieure de la petite virole, il suffira évidemment de changer dans la formule précédente r_1 en r'_0 et r_0 en r'_1, ce qui donne

$$(7') \qquad \mathrm{U}'_1 = \frac{\mathrm{N}}{2\lambda r'_1\left(\frac{1}{r'^2_1} - \frac{1}{r'^2_0}\right)}\left(1 - \frac{3}{5}\,\frac{r'^2_1}{r'^2_0}\right).$$

La condition pour que les viroles soient adaptées l'une sur l'autre est exprimée par

$$(8) \qquad r_0 + U_0 = r'_1 + U'_1,$$

et l'on a tous les éléments voulus pour déterminer N, par suite, les composantes p_{tt} dans les deux viroles.

Si l'on se donne la valeur maximum de ces composantes, on aura une équation qui permettra de déterminer $r_0 - r'_1$ en fonction de r_1, r'_0 et de r_0 ou r'_1, et, par suite, la température minimum à laquelle on doit porter la virole extérieure pour qu'elle puisse s'ajuster sur l'autre.

2° Dans le cas d'un cylindre intérieur, il faut que $B = 0$ pour que p_{rr} et p_{tt} ne deviennent pas infinis pour $r = 0$; ces deux pressions sont alors constantes et égales à N, et l'on trouve

$$A = -\frac{3}{10}\frac{N}{\lambda}$$

et

$$(7'') \qquad U'_1 = -\frac{3}{10}\frac{N}{\lambda}r'_1.$$

En substituant les expressions (7) et (7") dans la formule (8), le problème se trouvera complètement résolu.

45. *Vibrations tournantes d'un cylindre circulaire.* — Reportons-nous aux équations du n° **18** et supposons que, après avoir fait subir au cylindre une torsion, on l'abandonne ensuite à lui-même : il exécutera une série d'oscillations tournantes.

Cherchons d'abord à satisfaire aux équations (28), en posant $U = 0$, $V = r\sigma$, $W = 0$ et représentant par σ une fonction de Z et de t.

La formule (26) donne

$$\Delta = 0;$$

nous avons d'ailleurs

$$\chi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -2\sigma, \quad R = 0, \quad T = -\frac{dV}{dt} = -r\frac{d\sigma}{dt}, \quad W = 0.$$

La première et la troisième des équations (28) sont satisfaites.

La seconde se réduit à

$$(a) \qquad \frac{d^2\sigma}{dt^2} = k^2 \frac{d^2\sigma}{dz^2}.$$

Les formules (27) donnent

$$p_{rr} = 0, \quad p_{tt} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{zr} = 0, \quad p_{rt} = 0,$$

et enfin

$$(b) \qquad p_{zt} = -\lambda r \frac{d\sigma}{dz}.$$

On voit déjà que la pression sur la surface latérale est nulle.

Si la base est libre, on satisfera à l'équation (a) et à la condition que p_{zt} soit nul sur cette base en prenant

$$\sigma = A_i \cos\frac{i\pi z}{l} \cos\frac{i\pi k}{l} t,$$

l étant la longueur du prisme, i un nombre entier quelconque et A_i une constante.

On a ainsi

$$V = A_i r \cos\frac{i\pi z}{l} \cos\frac{i\pi k}{l} t$$

et, plus généralement,

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} A_i r \cos\frac{i\pi z}{l} \cos\frac{i\pi k}{l} t.$$

§ X. — Des sphères.

46. *Équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique soumise à l'action d'une pression normale constante sur sa surface intérieure et d'une pression semblable sur la surface extérieure.* — Soient

r_0, r_1 le rayon intérieur et le rayon extérieur de l'enveloppe;

P_0, P_1 la pression intérieure et la pression extérieure, la première étant censée supérieure à la seconde.

Nous nous reporterons au n° **19** et en supposant $R = 0$, $M = 0$, $T = 0$. Il est évident que les déplacements moléculaires produits par les pressions sont dirigés suivant les rayons et qu'ils ont la même valeur pour tous les points d'une sphère concentrique comprise entre celles qui limitent la couche; ce qui revient à supposer $V = 0$, $W = 0$ et à considérer U comme étant uniquement fonction de r.

Les équations (34) et (35) du n° **19** nous donnent alors

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{dU}{dr} + \dfrac{2U}{r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr^2U}{dr}, \\ p_{rr} = \lambda\left(\Delta + 2\dfrac{dU}{dr}\right), \\ p_{mm} = p_{tt} = \lambda\left(\Delta + \dfrac{2U}{r}\right), \\ p_{rm} = 0, \quad p_{rt} = 0, \quad p_{mt} = 0. \end{cases}$$

La seconde et la troisième des équations (**19**) du n° **10** sont satisfaites, et il ne reste que la première, qui se réduit à la suivante :

$$(2)\qquad \frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(p_{rr} - p_{mm}) = 0;$$

d'où, en vertu des valeurs (1),

$$\frac{d\Delta}{dr} + 2\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{d\dfrac{U}{2r}}{dr}\right) = 0$$

et enfin

$$\frac{d\Delta}{dr} = 0.$$

Ainsi donc la dilatation cubique est constante; en la désignant par $\frac{3A}{\lambda}$, nous aurons

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} = \frac{3A}{\lambda}$$

et, en représentant par B une autre constante,

$$U = \frac{Ar}{\lambda} + \frac{B}{\lambda r^2}.$$

La seconde et la troisième des équations (1) donnent, par suite,

$$(3) \qquad \begin{cases} p_{rr} = 5A - \dfrac{4B}{r^3}, \\ p_{mm} = p_{tt} = 5A + \dfrac{2B}{r}. \end{cases}$$

Nous avons maintenant, pour déterminer les constantes A et B, les relations

$$P_1 = 5A - \frac{4B}{r_1^3},$$

$$P_0 = 5A - \frac{4B}{r_0^3},$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{5(r_1^3 - r_0^3)}, \\ B = -\dfrac{(P_0 - P_1) r_1^3 r_0^3}{4(r_1^3 - r_0^3)}. \end{cases}$$

Si nous supposons que l'on ait

$$P_0 r_0^3 > P_1 r_1^3,$$

les coefficients A et B seront négatifs et la plus grande valeur de la traction $-p_{mm}$ développée dans la masse correspondra à $r = r_0$. Si nous désignons par Γ la valeur de ce maximum, censée donnée, égale au plus à celle de l'effort au delà de laquelle la matière tendrait à se désagréger, nous aurons

$$\Gamma = \frac{2(P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3) + (P_0 - P_1) r_1^3}{2(r_1^3 - r_0^3)};$$

on déduit de là

$$\frac{r_1}{r_0} = \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{P_0 - P_1}{\Gamma + P_0}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}.$$

Comme généralement, dans les applications, $\dfrac{P_0 - P}{\Gamma + P_0}$ est une petite frac-

tion, on peut réduire cette formule à la suivante :

$$\frac{r_1}{r_0} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{P_0 - P_1}{\Gamma + P_0}\right);$$

d'où, en désignant par e l'épaisseur $r_1 - r_0$,

$$e = \frac{r_0}{2}\left(\frac{P_0 - P_1}{\Gamma + P_0}\right),$$

soit la moitié de l'épaisseur obtenue au n° **43** pour une enveloppe cylindrique.

47. *Équilibre d'une croûte planétaire.* — Nous supposerons que la croûte est sphérique, que son épaisseur est uniforme, qu'elle est soumise à l'action de la gravité et de deux pressions constantes respectivement extérieure et intérieure.

Soient

r_1, r_0 les rayons extérieur et intérieur de la croûte;
P_1, P_0 les pressions extérieure et intérieure auxquelles elle est soumise;
g l'accélération de la gravité à sa surface.

Comme dans la question précédente, nous aurons $V = 0$, $W = 0$; U ne dépendra que de r. Des équations (34) et (35) du n° **19**, on déduit, comme ci-dessus :

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{dU}{dr} + \dfrac{2U}{r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr^2U}{dr}, \\ p_{rr} = \lambda\left(\Delta + 2\dfrac{dU}{dr}\right), \\ p_{mm} = p_{tt} = \lambda\left(\Delta + \dfrac{2U}{r}\right), \\ p_{rm} = 0, \quad p_{rt} = 0, \quad p_{mt} = 0. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$R = -\frac{gr}{r_1}, \quad M = 0, \quad T = 0.$$

La seconde et la troisième des équations (19) du n° **10** sont satis-

faites; la première, la seule que nous ayons à considérer, se réduit à

$$\frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(p_{rr} - p_{mm}) = -\frac{\mathrm{D}gr}{r_1},$$

d'où

$$3\lambda\frac{d\Delta}{dr} = -\frac{gr}{r_1},$$

et en désignant par A une constante arbitraire et par Π le poids spécifique Dg de la matière,

$$\Delta = -\frac{\Pi r^2}{6\lambda r_1} + \frac{3\mathrm{A}}{\lambda}. \tag{2}$$

En vertu de la première des équations (1), la formule (2) donne successivement, en désignant par B une nouvelle constante arbitraire,

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2\mathrm{U}}{dr} = -\frac{\Pi r^2}{6\lambda r_1} + \frac{3\mathrm{A}}{\lambda},$$

$$\mathrm{U} = -\frac{\Pi r^3}{30\lambda r_1} + \frac{\mathrm{A}r}{\lambda} + \frac{\mathrm{B}}{\lambda r^2}.$$

La seconde des équations (1) donne, par suite,

$$p_{rr} = -\frac{11}{30}\frac{\Pi r^2}{r_1} + 4\mathrm{A} - \frac{2\mathrm{B}}{r^3}.$$

Les constantes A et B se détermineront par les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{P}_0 &= -\frac{11}{30}\Pi\frac{r_0^2}{r_1} + 4\mathrm{A} - \frac{2\mathrm{B}}{r_0^3}, \\ \mathrm{P}_1 &= -\frac{11}{30}\Pi\frac{r_1^2}{r_1} + 4\mathrm{A} - \frac{2\mathrm{B}}{r_1^3}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

47. *Vibrations radiales d'une enveloppe sphérique.* — Considérons une enveloppe sphérique soustraite à l'action de toute force extérieure, et supposons qu'à un instant quelconque, que nous prendrons pour origine du temps, ses molécules vibrent suivant les rayons, et que ces vibrations ne dépendent que de la distance au centre. Cherchons à voir si ce mode de vibrations pourra se perpétuer indéfiniment.

Dans les formules du n° **19**, nous devrons supposer $V = 0$, $W = 0$, $M = 0$, $T = 0$ et

$$R = -\frac{d^2 U}{dt^2}.$$

Nous devrons admettre que U et Δ sont indépendants de θ et ψ.

La deuxième et la troisième des équations (37) du numéro précité sont satisfaites. La première, eu égard à la formule (34), donne

$$(1) \qquad \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{2U}{r^2} = \frac{1}{k^2}\frac{d^2 U}{dt^2},$$

en posant, pour abréger,

$$(2) \qquad k^2 = \frac{D}{3\gamma}.$$

Soient

q un nombre quelconque,
ε une constante arbitraire;
X une fonction de r.

En substituant dans l'équation (1) l'expression

$$U = X\cos(qt + \varepsilon),$$

on trouve

$$(4) \qquad \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dX}{dr} + \left(\frac{q^2}{k^2} - \frac{2}{r^2}\right)X = 0.$$

Les constantes introduites par l'intégration de cette équation devront satisfaire aux conditions $p_{rr} = 0$, $p_{rm} = 0$, $p_{rt} = 0$, pour les rayons intérieur r_0 et extérieur r_1 de l'enveloppe. Mais, d'après les équations (35) du n° **19**, la seconde et la troisième de ces conditions se trouvent vérifiées d'elles-mêmes et la première revient à la suivante :

$$(3) \qquad 2\frac{dU}{dr} + 2\frac{U}{r} = 0 \quad \text{pour } r = r_0 \text{ et } r = r_1.$$

Si l'épaisseur $e = r_1 - r_0$ est suffisamment petite, l'équation (4) se réduit approximativement à la suivante :

$$\frac{d^2X}{dr^2} + \frac{2}{r_0}\frac{dX}{dr} + \left(\frac{q^2}{k^2} - \frac{2}{r_0^2}\right)X = 0,$$

que l'on sait intégrer.

FIN.

NOTE

SUR L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR DES SEMI-FLUIDES.

On désigne généralement sous le nom de *semi-fluides* un système matériel formé de la juxtaposition de corps solides, dont les dimensions moyennes sont petites et ne varient des unes aux autres qu'entre des limites relativement restreintes ; le sable de rivière est le type des semi-fluides.

Lorsqu'un pareil système sera en équilibre, il ne tendra à se déplacer que si, en un certain nombre de points de contact de ses éléments, les actions mutuelles tangentielles atteignent la valeur du frottement de glissement. On peut admettre que le coefficient de ce frottement a sensiblement la même valeur d'un point à l'autre de la masse.

S'il s'agit d'un volume semi-fluide considérable, on peut le supposer divisé en parties telles que, tout en renfermant un nombre notable de corpuscules, leurs dimensions soient relativement assez petites pour que l'on puisse en négliger les secondes puissances; de sorte que l'on est ramené, en ce qui concerne la recherche des conditions d'équilibre, à substituer au semi-fluide une masse continue ayant pour densité sa densité apparente moyenne; on supposera ensuite que la composante tangentielle de la pression sur un élément plan atteint son maximum lorsqu'elle est égale au frottement de glissement.

Nous ne considérerons que le cas d'un semi-fluide soumis à l'action de la pesanteur.

Si la masse est complètement libre, c'est-à-dire si elle ne s'appuie

en aucun point contre un obstacle, il faut, pour qu'elle soit en équilibre, que le plan tangent en un point quelconque de la surface fasse avec l'horizon un angle moindre que l'angle de frottement : cette inclinaison limite définit ce que l'on appelle le *talus naturel d'un semi-fluide,* c'est-à-dire la pente qu'il prend à la suite d'un éboulement.

Une terre quelconque peut être considérée comme un semi-fluide dont les vides, entre les corpuscules, sont remplis par une matière très divisée qui donne à la masse une certaine cohésion, lorsque cette masse ne vient pas d'être fraîchement remuée.

Quand il s'agit de calculer l'épaisseur que doit avoir un mur de soutènement, pour résister à la poussée d'une terre, il y a avantage, au point de vue de la sécurité, à faire abstraction de cette cohésion, parce qu'on trouve alors des épaisseurs supérieures à celles qui correspondent au degré de stabilité que l'on a en vue d'obtenir.

Nous sommes ainsi conduit à considérer un sable ou une terre comme une masse continue qui, lorsque son équilibre n'est pas naturel ou qu'il n'existe que par la présence de corps extérieurs tels qu'un mur, est en équilibre instable; de sorte que, si l'on considère tous les éléments superficiels passant par un point quelconque de la masse, le maximum de l'angle formé par la pression sur un élément avec sa normale doit être égal à l'angle de frottement.

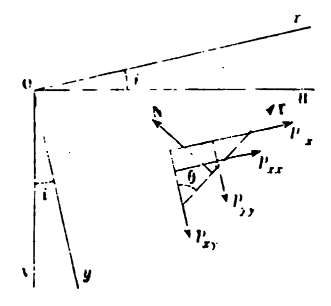
Nous désignerons respectivement par α et α' les angles de frottement d'un semi-fluide sur lui-même et contre le mur.

Considérons maintenant une masse de terre de forme prismatique à arêtes horizontales, d'une longueur assez grande pour qu'on puisse la considérer comme indéfinie, soutenue par un mur. L'équilibre devant, d'après ce que l'on a dit plus haut, être regardé comme instable, la masse tend à se déplacer suivant des surfaces cylindriques à génératrices horizontales, pour chacun des éléments desquelles le rapport de la composante tangentielle à la composante normale de la pression est égal à la tangente de l'angle de frottement; au contact du mur, le rapport semblable aura également une valeur spéciale qui sera, en général, peu différente de la précédente.

Nous ferons abstraction des pressions dans les plans perpendiculaires aux arêtes des prismes, ce qui nous ramène à considérer simplement une section faite par l'un de ces plans.

Soient

Ox, Oy deux axes rectangulaires tracés dans le plan d'une section, en prenant pour origine la trace de l'intersection du parement intérieur du mur et du talus;



i l'inclinaison de Ox sur l'horizontale OH égale à celle de la verticale OV sur Oy;

Π le poids de l'unité de volume.

En exprimant qu'un rectangle élémentaire, dont les côtés sont parallèles à Ox, Oy, est en équilibre, on obtient les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{xy}}{dy} = -\Pi \sin i, \\[2mm] \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{yx}}{dx} = \Pi \cos i. \end{cases}$$

Considérons maintenant un triangle rectangle élémentaire, dont les côtés de l'angle droit sont parallèles à Ox, Oy, et dont l'hypoténuse fait l'angle θ avec ce dernier côté; soient N, T les composantes normale et tangentielle de la pression sur l'hypoténuse. En exprimant que les forces qui sollicitent le triangle se font équilibre, en projection sur les directions de N et T, on trouve

$$N = (p_{xx}\cos\theta + p_{yx}\sin\theta)\cos\theta + (p_{yy}\sin\theta + p_{xy}\cos\theta)\sin\theta,$$
$$T = (p_{yy}\sin\theta + p_{xy}\cos\theta)\cos\theta - (p_{xx}\cos\theta + p_{xy}\sin\theta)\sin\theta$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} N = \dfrac{p_{xx}+p_{yy}}{2} + \dfrac{p_{xx}-p_{yy}}{2}\cos 2\theta + p_{xy}\sin 2\theta, \\ T = -\dfrac{p_{xx}-p_{yy}}{2}\sin 2\theta + p_{xy}\cos 2\theta. \end{cases}$$

Pour trouver les directions des pressions principales, il faut supposer $T = 0$, ce qui donne

$$(3)\qquad \operatorname{tang} 2\theta_1 = \frac{2p_{xy}}{p_{xx}-p_{yy}}.$$

On appelle *ligne isostatique* une ligne telle, que la pression sur chacun de ses éléments est normale à cet élément. Une pareille ligne est définie par

$$\operatorname{tang}\theta_1 = -\frac{dx}{dy}$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{p_{xx}-p_{yy}}{p_{xy}}\right) - 1 = 0,$$

et l'on voit que, *en chaque point de la masse, il passe deux courbes isostatiques normales entre elles et tangentes aux directions des pressions principales au même point.*

Si nous posons

$$\operatorname{tang}\varkappa = \frac{T}{N} = \frac{-(p_{xx}-p_{yy})\sin 2\theta + 2p_{xy}\cos 2\theta}{p_{xx}+p_{yy}+(p_{xx}-p_{yy})\cos 2\theta + 2p_{xy}\sin 2\theta},$$

il vient

$$(4)\quad (p_{xx}+p_{yy})\sin\varkappa + (p_{xx}-p_{yy})\sin(2\theta+\varkappa) - 2p_{xy}\cos(2\theta+\varkappa) = 0.$$

Pour exprimer que $\varkappa$ est maximum ou minimum, il faut différentier cette équation en y supposant $\frac{d\varkappa}{d\theta} = 0$, ce qui donne

$$\operatorname{tang}(2\theta+\varkappa) = -\frac{(p_{xx}-p_{yy})}{2p_{xy}}.$$

Or nous avons admis que le maximum de la valeur absolue du rap-

port $\frac{T}{N}$ doit être égal à tangα; on devra donc supposer

$$\varkappa = \alpha \quad \text{ou} \quad \varkappa = -\alpha,$$

selon le sens de T, et nous aurons

$$(5) \qquad \tang(2\theta \pm \alpha) = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2p_{xy}}.$$

L'équation (4) devient, en y faisant $\varkappa = \pm \alpha$, puis éliminant θ au moyen de la formule (5),

$$(6) \qquad (p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2 - (p_{xx} + p_{yy})^2 \sin^2\alpha = 0.$$

On appelle *lignes de glissement* celles pour chaque élément desquelles la composante tangentielle de la pression est égale au frottement de glissement. On obtiendra leur équation différentielle en supposant

$$\tang\theta = -\frac{dx}{dy}$$

dans la formule (5). Comme à chacun des signes de α correspondent deux valeurs de θ qui diffèrent entre elles de 90°, on voit que, en chaque point de la masse, il passe deux systèmes orthogonaux de lignes de glissement. Si l'on désigne par θ_2 la valeur de θ correspondant à l'une des lignes de glissement, les équations (3) et (5) donnent

$$\tang(2\theta_2 \pm \alpha) = -\cot 2\theta_1 = \tang(2\theta_1 + 90^\circ) \quad \text{ou} \quad \tang(2\theta_1 + 270^\circ),$$

d'où

$$\theta_2 - \theta_1 = 45^\circ \pm \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou} \quad 135^\circ \pm \frac{\alpha}{2},$$

pour les angles sous lesquels se coupent les lignes de glissement de l'un et de l'autre système avec les lignes isostatiques. On voit ainsi que les lignes de glissement forment deux groupes composés chacun de deux lignes appartenant respectivement à l'un et l'autre système. Les

lignes d'un groupe forment, avec l'une des bissectrices des angles des diamètres principaux de l'ellipse des pressions, et de part et d'autre de cette bissectrice, des angles égaux à la moitié de l'angle de frottement; par suite, dans toute la masse, *les courbes isostatiques et les courbes de glissement se coupent sous un angle constant.*

Comme l'équation (6) a été établie sans faire aucune hypothèse sur le choix des axes coordonnés, elle subsiste encore lorsque l'on suppose qu'ils sont parallèles aux directions des pressions principales; mais alors on a $p_{xy} = 0$ et par suite

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 = (p_{xx} + p_{yy})^2 \sin^2\varphi;$$

le rapport $\frac{p_{xx}}{p_{yy}}$ des pressions principales est donc constant, ou encore *toutes les ellipses des pressions sont semblables.*

Intégration des équations d'équilibre. — Les équations (1) et (6) devront permettre de déterminer les pressions inconnues p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}. Les équations (1) seront satisfaites en posant

$$\left\{\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{d^2F}{dy^2},\\ p_{xy} &= -\Pi y \sin i - \frac{d^2F}{dx\,dy},\\ p_{yy} &= \Pi y \cos i - \frac{d^2F}{dx^2}, \end{aligned}\right.$$

F étant une fonction de x, y, qui serait l'intégrale de l'équation aux différentielles partielles obtenue en substituant ces valeurs dans la formule (6); mais cette équation, qui est du second ordre et du second degré, est trop compliquée pour qu'on puisse songer à l'intégrer.

Quant aux conditions relatives aux limites, elles s'obtiendront en exprimant : 1° que $N = 0$, $T = 0$ pour tous les points des talus, en faisant ainsi abstraction de la pression atmosphérique, ce qui revient à considérer N comme l'excès sur cette pression, d'une pression intérieure normale; 2° que, pour tous les points du mur, $\frac{T}{N}$ est égal à la

équation qui fera connaître l'angle $\mathfrak{G}'$. On a aussi

$$\operatorname{tang} 2\mathfrak{G}_1 = \frac{\sin i}{\cos i - n},$$

et les lignes isostatiques de chaque système sont droites et parallèles.

Les lignes de glissement sont également droites et leurs inclinaisons $\mathfrak{G}$ sur Oy sont données par

$$\operatorname{tang}(2\mathfrak{G} \pm \alpha) = -\frac{\cos i - n}{\sin i}.$$

Dans tous les autres cas, les lignes de glissement ne seront pas droites, comme on le suppose *a priori*, dans la théorie ordinaire de la poussée des terres.

Ces différentes considérations sont dues à M. Maurice Levy.

TABLE DES MATIÈRES.

ÉLECTRODYNAMIQUE.

CAPILLARITÉ.

§ I. — *Formules fondamentales.*

§ II. — *Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants.*

(1) Note sur $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} \cos p(x-\alpha)\, dp$.

§ III. — *Mouvement de la chaleur dans une sphère.*

§ IV. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cylindre circulaire indéfini.*

§ V. — *Mouvement uniforme de la chaleur dans un prisme carré indéfini dans un sens.*

§ VI. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cube.*

§ VII. — *Mouvement varié de la chaleur dans un solide indéfini dans tous les sens.*

DÉVELOPPEMENTS

SUR QUELQUES QUESTIONS QUI SE RATTACHENT A LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR.

§ I. — *Intégration de l'équation de Bessel.*

§ II. — *Expression d'une fonction entre les limites données de la variable en série trigonométrique.*

([1]) Sur l'évaluation de l'intégrale $\int_0^\pi \cos^{2i}\theta \sin^{m-1}\theta \, d\theta$.

([2]) Sur celle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}$.

(1) Détermination des intégrales $\int_0^\infty e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha$, $\int_0^\infty e^{-\alpha}\sin p\alpha\, d\alpha$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px\, dp}{1+p^2}$.

(2) Sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p \sin px\, dp}{1+p^2}$.

(3) Sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin p x \cos q x}{p}\, dp$.

ÉLECTROSTATIQUE.

EXPOSÉ DES PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

MOUVEMENTS

DES AIMANTS ET DES COURANTS DÉTERMINÉS PAR LEURS ACTIONS MUTUELLES.

DE L'ÉLASTICITÉ.

§ I. — *Généralités.*

§ II. — *De l'équilibre intérieur d'un corps, quel que soit l'état physique ou la nature.*

§ III. — *Équations générales de l'équilibre intérieur d'un corps élastique isotrope.*

§ IV. — *De la traction et de la compression d'un prisme ou cylindre.*

§ V. — *De la torsion des prismes.*

§ VI. — *De la flexion des prismes.*

§ VII. — *Des vibrations des prismes et cylindres.*

§ VIII. — *Des membranes élastiques.*

§ IX. — *Des cylindres circulaires.*

ERRATA.

Pages.	*Lignes.*	*Au lieu de :*	*Lire :*
26.	4.	*fig.* 6	*fig.* 2
34.	6.	c	C
34.	6 et 9.	$-C\cos\varphi$	$C-\cos\varphi$
48.	4 en remontant.	R^2	R'
48.	1.	diffère	diffère peu
106.	6.	Une virgule avant O et Oa.	
106.	7 en remontant, après a_1.	Mettre : ou	
113.	2 et 3.	Mettre un point avant dx.	
140.	5 en remontant.	$+2$	-2
140.	Faire précéder (1) de		
142.	6.	extérieure	intérieure
142.	A la fin de la formule (1).	V^2	r^2
148.	1.	16 (numéro)	65
148.	8.	Primitivement dans	Primitivement distribué dans
168.	8 et 9 en remontant.	Mettre du à la suite de la première intégrale.	
182.	7.	$= M_1$	$= M_2$
210.	5.	$\varepsilon'-\varepsilon'_1$	$e'-e'_1$
215.	16.	doués	dénués
223.	3 en remontant.	ds	ds
236.	7	et,	, et
258.	5	25 (numéro)	22
259.	1	22 »	23
259.	5 en remontant.	23 »	24
260.	3 en remontant.	27 »	25
266.	3.		en tête, 3 (numéro)
267.	7.		» 4 »
268.	11.		» 5 »
321.	5.	enfin ayant	en ayant
339.	4.	z	x
355.	6 en remontant.	47	48 (numéro)

8361 PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.






SEP 6 -